Erforschen und Argumentieren im Anfangsunterricht der Sekundarstufe II Zusammenhänge an der Hundertertafel

Inhaltsverzeichnis

Vorüberlegungen

Die Idee für die Lernumgebung findet sich im Zahlenbuch 6 (Affolter et al 2001)

Kompetenzentwicklung „Erforschen und Argumentieren“

Die charakteristische Tätigkeit eines professionellen Mathematikers, einer professionellen Mathematikerin, ist es, in Situationen Zusammenhänge zu entdecken, diese als Vermutungen zu formulieren und dann zu beweisen. Im Schweizer Lehrplans 21 wird dieser Prozess als „Erforschen und Argumentieren“ beschrieben. Im Vergleich mit den Kompetenzen der KMK wird der vorgängige Prozess des Erforschens weniger prominent aufgeführt - muss aber natürlich immer mitgedacht werden. Im Bereich der Arithmetik und Algebra wird die Kompetenz folgendermassen ausgeführt:

«Die Schülerinnen und Schüler lernen *erforschen und argumentieren*: Sie können sich auf unbekannte Zahlenräume und Muster einlassen, Beispiele zu Gesetzmässigkeiten suchen und Zahlen systematisch variieren. Die erlangten Ergebnisse können sie können sie beschreiben, überprüfen, hinterfragen, interpretieren und begründen.» (EDK, 2011)

Die in dieser Lernumgebung benötigten Argumentationen umfassen jeweils nur wenige Schritte, erfordern aber eine selbstständige Prozesssteuerung, so dass bereits hohe Kompetenzstufen angesprochen werden können (Kompetenzstufung findet sich zum Beispiel in Meyer, 2007 und 2012).

Lernstandserhebung

Bereits in der Sekundarstufe I werden die Schülerinnen und Schüler immer wieder aufgefordert, etwas zu begründen. Die Schülerinnen und Schüler haben also bereits verschiedene Kompetenzstufen erreicht - es ist allerdings bislang nicht davon auszugehen, dass dies in vergleichbarer Weise erarbeitet wurde. Mit dieser Lernumgebung kann die Lehrperson feststellen, wie weit die Argumentationskompetenz bei den Schülerinnen und Schülern entwickelt ist. Ausserdem können Verabredungen getroffen werden, was in der Klasse als gute Begründung gilt.

Ablauf

Die Idee für die Lernumgebung findet sich im Zahlenbuch 6 (Affolter et al 2001).

Mögliche Vorbereitung der Unterrichtseinheit

Zur Vorbereitung der Lernumgebung „Zusammenhänge an der Hundertertafel I“ ist es sinnvoll, das Distributivgesetz mit Hilfe eines Rechteckflächenmodells zu wiederholen und auch zu zeigen, dass die Multiplikation im Zehnersystem auf dem Distributivgesetz (Zahlen nach Einern, Zehnern usw aufgeteilt) beruht.

Aussermathematische Einführung

Frage an die SchülerInnen:

„Was ist im Biologieunterricht eine gute Begründung, was im Geographieunterricht?“

Einsatz der Lernumgebung: „Zusammenhänge an der Hundertertafel I“

Zeitaufwand ca 20-30 Minuten, je nach Konzentrationsfähigkeit (und -bereitschaft) der Schülerinnen und Schüler.

Partnerarbeit ist möglich, grössere Gruppen sollten aber vermieden werden, damit nicht eine Einigung über Argumentationsformen vorweggenommen wird.

Schülerinnen und Schüler der Fachmittelschule der Schweiz kommen nach den bisherigen Erfahrungen nicht auf die Idee, dass die Aufgabe mit Algebra zu bearbeiten ist. In gymnasialen Klassen ist mit algebraischen Lösungen zu rechnen, die dann insbesondere den Aufgabenteil mit dem Produkt der Diagonalen extrem vereinfachen. An dieser Stelle muss die Lehrperson präsent sein, dass sich die Lösung nicht in der ganzen Klasse verbreitet. Je nach Situation kann entweder die Schülerin/der Schüler mit einer algebraischen Lösung gebeten werden, es ohne Algebra zu begründen zu versuchen, oder es wird ein anderer Auftrag gegeben.

Einsammeln der Lernumgebung. Die Lehrperson fertigt eine Zusammenstellung (Autographensammlung) mit einigen Begründungen (siehe Beispiel im nächsten Abschnitt) an. Die Lösungen der SchülerInnen können im Original verwendet werden oder aus Gründen der Anonymisierung abgetippt werden.

Bearbeitung der Autographensammlung mit Lösungen zur ersten Lernumgebung

In Partnerarbeit wird während 30 Minuten der folgende Auftrag bearbeitet:

„Aufgeführt sind einige Begründungen aus der Klasse, teilweise leicht verändert.

- Versuchen Sie die Begründungen zu verstehen.
- Markieren sie jeweils bis zu zwei Begründungen, die Ihnen gut gefallen.
- Formulieren Sie allgemein Ihre Ansicht: was zeichnet eine gute Begründung aus?“

Dieser Auftrag kann der Autographensammlung vorangestellt werden. Die Lehrperson ist hier besonders gefragt, bereits während des Auftrags mit den Schülerinnen und Schülern zu kommunizieren. Eine minimalistische Bearbeitung ist nicht sinnvoll, da die Bearbeitung eine Grundlage für das weitere Vorgehen in der Klasse liefern kann. Nichtsdestotrotz ist es sinnvoll, einen Arbeitsauftrag für die Gruppen, die frühzeitig abgeben müssen, vorbereitet zu haben.

Im Anschluss stellt die Lehrperson zusammen, welche Begründungen gut angekommen sind - und vor allem, Aussagen dazu, was eine gute Begründung ist. Dabei kann je nach Medienausstattung mit Beamer oder Overheadprojektor (Hellraumprojektor in der Schweiz) gearbeitet werden.

Verabredung: Was ist eine gute Begründung?

In der nächsten Stunde werden die Aussagen zu guten Begründungen zusammengestellt. Ziel ist eine klasseninterne Verabredung, was eine gute Begründung ist. Das kann sich ruhig von Klasse zu Klasse unterscheiden. Wichtig ist aber, dass wichtige Elemente der Theorie enthalten sind - und jedenfalls die Lehrperson einverstanden ist. Die Lehrperson beteiligt sich also an der Diskussion.

Einsatz der Lernumgebung: „Zusammenhänge an der Hundertertafel II“

Der Zeitbedarf für diese Lernumgebung sollte ca 15-20 Minuten betragen. Damit aber Zeitreserven bestehen ist der Einsatz zu Beginn einer Stunde sinnvoll.

Falls es algebraische Lösungen zur ersten Lernumgebung gegeben hat, sollte darum gebeten werden, hier neben einer algebraischen auch eine zweite Lösung zu erarbeiten.

Die Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler werden von der Lehrperson kommentiert. Fokus sollte auf den Elementen guter Begründungen liegen. Je nach Situation im Schulsystem ist eine Bewertung der Bearbeitung denkbar.

Sollte keine Bewertung erfolgen, kann die Lernumgebung durchaus in Gruppen von 2 bis 4 Lernenden bearbeitet werden.

Testaufgabe

In den nächsten Test in der Klasse kann die folgende kompetenzorientierte Prüfungsfrage eingebaut werden:

„Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen (z.B. 13+14+15) ist immer durch 3 teilbar. Begründen Sie, ob diese Aussage korrekt ist.“

Kommentierte Lösungen von Schülerinnen und Schülern

Begründungen zur ersten Lernumgebung, Teil a

Aufgeführt sind einige Begründungen einer zehnten Klasse, teilweise leicht verändert.

1. Die beiden Summen sind immer gleich gross. Dies ist so, weil man jeweils eine Zahl, die um 1 kleiner ist mit einer zusammenrechnet, die um 1 grösser ist.
   -1 +1
   +1 -1 (2 Stimmen)
2. Auf einer Seite wird eins subtrahiert und auf der anderen Seite eins addiert. Damit ändert sich das Resultat nicht von der ersten Diagonale.

   Zum Beispiel 14 + 3= 17

   -1 +1

   13 + 4=17 (9 Stimmen)

3. Begründung: bei einer Zahl wird 1 abgezogen und 1 dazugezählt. = Das Resultat bleibt gleich. (6 Stimmen)

Begründungen zur ersten Lernumgebung, Teil b

1. Dies ist so, weil man die beiden hinteren Zahlen immer gleich mit sich selber multipliziert.
   16*27= 10*20+10*7+6*20+6*7
   17*26= 10*20+10*6+7*20+6*7
   Der einzige Unterschied ist man rechnet einmal die kleinere Zahl der ersten Stelle mit der grösseren Zahl der zweiten Stelle und umgekehrt.
   Bsp 2
   13*24=10*20+10*4+3*20+3*4
   14*23=10*20+10*3+4*20+3*4 (3)
2. Der Unterschied ist immer 10, zudem ergibt immer die zweite Rechnung ein höheres Resultat als die erste. Das ist so weil bei der ersten „nur“ einmal die 16 dazugenommen wird . Bei der zweiten Rechnung 1*26 dazukommt. Das erklärt auch die 10er Differenz. (5)
3. 16*27=432=(10+6)(20+7)=200+70+120+42
   17*26=442=(10+7)(20+6)=200+60+140+42
   Der Unterschied ist immer 10.
   16*27=+16*1=16
   17*26=+1*26-16=10 (3)

Autographensammlung: was ist eine gute Begründung?

- Für mich ist eine Begründung gut, wenn man viele Beispiele macht und dann in eigenen Worten die Beispiele erklärt. Eine Begründung muss auf den Punkt sein und nicht langes «Herumgefasel». Sie muss in einem verständlichen und gutem Deutsch geschrieben sein (einfach).
- Sie muss klar und übersichtlich dargestellt sein.
- Eine gute Begründung ist kurz und bündig. Lieber ein allgemeines Beispiel als irgendwelche-Zahlen.
- Jeder Schritt wurde erklärt und Zahlen stellen Denkhilfen dar.
- Die Erklärung ist verständlich aufgeschrieben. Zudem ist sie nicht sehr lang. Eine gute Erklärung kann ohne Zahlen auskommen, diese jedoch als Hilfestellung verwenden.
- Eine Begründung ist gut, wenn sie nicht allzu kompliziert ist.

Vorschlag: was ist eine gute Begründung, theoriegestützt

Hier steht noch nix.

Literatur

Affolter, W., Amstad, H., Doebeli, M. und Wieland, G. (2001): Das Zahlenbuch 6. Zug: Klett und Balmer.

EDK, Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (2011): Grobstruktur Lehrplan 21. http://lehrplan.ch/sites/default/files/grobstruktur_lp21.pdf

Hengartner, E., Hirt, U. u. Wälti, B. (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Zug: Klett.

Hirt, U., Wälti, B. (2008): Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Seelze: Kallmeyer.

Jundt, W. und Wälti, B. (2011): Mathematische Beurteilungsumgebungen; 7. Schuljahr. Zug: Klett und Schulverlag.

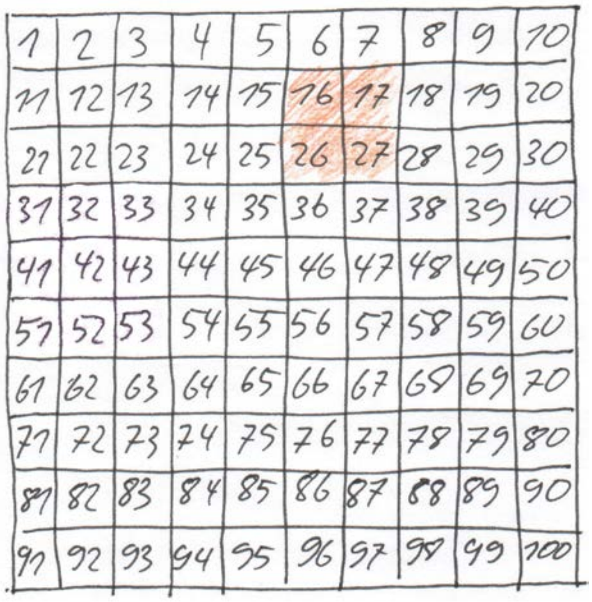
Krauthausen, G. u. Scherer, P. (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg: Spektrum.

Meyer, H. (2007). Leitfaden Unterrichtsvorbereitung. Berlin: Cornelsen Scriptor

Meyer, H. (2012). Kompetenzorientierung allein macht noch keinen guten Unterricht. Handout zum Vortrag auf der didacta 2012.

Wittmann, E. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zur Lehrerbildung 16(3), S. 329-342)

Zusammenhänge an der Hundertertafel I



a) Wählen Sie ein Quadrat mit vier Zahlen in der Hundertertafel. Bilden Sie die Summe der Diagonalen (im Beispiel im Bild wäre das 16+27 und 17+26). Führen Sie das für mehrere Beispiele durch. Was stellen Sie fest? Können Sie das begründen?

b) Bilden Sie nun die Produkte der Diagonalen (im Beispiel also 16 · 27 und 17 · 26.
Führen Sie auch hier mehrere Beispiele aus. Was stellen Sie fest? Begründung?

Zusammenhänge an der Hundertertafel II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Bilden Sie in verschiedenen Quadraten mit 9 Zahlen die Summe der äusseren 8Zahlen (im Beispiel 336) und vergleichen Sie mit der mittleren Zahl. Was stellen Sie fest? Können Sie das begründen?