Mathemik-Repetitorium

Lösungen

zu Aufgaben von Hrn. Dr. T. Linnemann
durch Felix Steiner, Klasse 4cN (Matur 2003)
3. April 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Repetition Geometrie, Analytische Geometrie, Matrizen

1.1 Geraden in der Ebene

Im folgenden gilt bei Geraden der Form $g(x) = q + my$ für die Steigung m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

und den Schnittpunkt q mit der y-Achse:

$$q = y_B - x_B \cdot m = y_A - x_A \cdot m$$

Eine Tangente an eine Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = n$ findet sich durch $f'(n)$; eine Gerade steht senkrecht auf eine Funktion, wenn sie senkrecht auf die Tangente zeigt; eine Gerade mit Steigung $\frac{y}{x}$ steht senkrecht auf eine Gerade mit Steigung $-\frac{x}{y}$.

Aufgabe 1.1

a)

$$m = \frac{7-3}{6-4} = 2 \quad \text{und} \quad q = 7 - 6 \cdot 2 = -5$$
$$g(x) = -5 + 2x$$

b)

$$m = \frac{-5-(-4)}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad q = -5 - (-2) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{13}{3}$$
$$g(x) = -\frac{13}{3} + \frac{1}{3}x$$

Aufgabe 1.2

$$m = \frac{4}{3} \quad P(3|-4) \quad \rightarrow \quad q = -4 - 3 \cdot \frac{4}{3} = -8$$
$$g(x) = -8 + \frac{4}{3}x$$

Aufgabe 1.3

$$m = -4 \quad P(0|3) \quad \rightarrow \quad g(x) = 3 - 4x$$

Aufgabe 1.4

$$A(4|0), B(0|-2)$$
$$m = \frac{-2}{-4} = 0.5 \quad q = -2 - 0 \cdot 0.5 = -2$$
$$g(x) = -2 + 0.5x$$

Aufgabe 1.5

$$g(x) = 4 - 2x$$

Aufgabe 1.6

$$m = -2 \quad f(x) = x^2 + 4x - 4 \quad P(3|f(3)) \in \{f(x), g(x)\}$$
$$P(3|(3^2 + 4 \cdot 3 - 4)) = (3/17) \quad m = -2 \quad q = 17 - 3 \cdot (-2) = 20$$
$$g(x) = 23 - 2x$$

Aufgabe 1.7

a)

$$f(x) = x^3 + 7x + 9 \qquad f(4) = 64 + 28 + 9 = 101 \;\rightarrow\; P(4|101) \in \{f(x), g(x)\}$$
$$f'(x) = 3x^2 + 7 \qquad f'(4) = 3 \cdot 16 + 7 = 55 \;\rightarrow\; m = 55$$
$$q = 101 - 4 \cdot 55 = -119 \quad \rightarrow \quad g(x) = -119 + 55x$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} \qquad f(4) = \frac{16 + 12 + 3}{4 + 2} = \frac{31}{6} \;\rightarrow\; P\left(4\middle|\frac{31}{6}\right) \in \{f(x), g(x)\}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} \qquad f'(4) = \frac{16 + 16 + 3}{6^2} = \frac{35}{36} \;\rightarrow\; m = \frac{35}{36}$$
$$q = \frac{35}{6} - 4 \cdot \frac{23}{36} = \frac{23}{18} \quad \rightarrow \quad g(x) = \frac{23}{18} + \frac{35}{36}x$$

Aufgabe 1.8

a)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \qquad f(1) = \frac{3 + 8 + 6}{12} = \frac{17}{12} \;\rightarrow\; P\left(1|\frac{17}{12}\right) \in \{f(x), g(x)\}$$
$$f'(x) = x^3 + 2x^2 + x \qquad f'(1) = 4 \;\rightarrow\; m_{f(x)} = 4 \;\rightarrow\; m_{g(x)} = -\frac{1}{4}$$
$$q = \frac{17}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad g(x) = \frac{5}{3} - \frac{1}{4}x$$

b)

$$f(x) = x^2 - 2x + 9 \qquad f(1) = 1 - 2 + 9 = 8 \;\rightarrow\; P(1|8) \in \{f(x), g(x)\}$$
$$f'(x) = 2x - 2 \qquad f'(x) = 2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; m_{f(x)} = 0$$
$$g(x) = 1$$

Aufgabe 1.9

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; g(x) = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}x \qquad g'(x) = -\frac{1}{4}$$
$$f(x) = x^3 + x^2 + ax + b \qquad f'(x) = 3x^2 + 2x + a$$
$$f'(2) = g'(2) \;\rightarrow\; a = -\frac{65}{4}$$
$$g(2) - f(2) = -\frac{91}{4} = b \quad \rightarrow \quad f(x) = x^3 + x^2 - \frac{65}{4}x + \frac{91}{4}$$

Aufgabe 1.10

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \qquad g(x) = 2 + \frac{3}{4}x$$

$$f(x) = g(x) \;\rightarrow\; x_1 = \frac{\sqrt{313} + 11}{8} \qquad x_2 = \frac{-(\sqrt{131} - 11)}{8}$$

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{11 \cdot \sqrt{313}}{192} - \frac{-97 \cdot \sqrt{313}}{128} = \frac{313 \cdot \sqrt{313}}{384} \approx 14.421$$

Aufgabe 1.11

$$y\text{-Achse:}\quad x = 0 \qquad x\text{-Achse:}\quad y = 0 \qquad g(x) = 8 - \frac{8}{5}x$$

$$g(y) = \frac{(y-8) \cdot 5}{8} \qquad g(y) = 0 \;\rightarrow\; y_0 = 8$$

$$V = \pi \cdot \int\limits_0^{y_0} g(y)^2\,dy = \pi \cdot \int\limits_0^{8} \left(\frac{(y-8) \cdot 5}{8}\right)^2 dy = \frac{200 \cdot \pi}{3} \approx 209.440$$

1.2 Stereometrie (*)

Aufgabe 1.12 (*) Kegel in Kugel mit $V_{Kegel} = \frac{1}{4} \cdot V_{Kugel}$; $r_{Kugel} = 1$.

$$V_{Kugel} = \frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{4\pi}{3} \qquad V_{Kegel} = A \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{4} \cdot V_{Kugel} = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} r^2 + (h-1)^2 &= 1 \\ (h-1)^2 &= 1 - r^2 \\ h - 1 &= \sqrt{1 - r^2} \\ h &= \sqrt{1 - r^2} + 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \;\rightarrow\; r^2 \cdot h = 1$$

$$r^2 \cdot (\sqrt{1 - r^2} + 1) = 1$$

$$r_0 = 1 \quad \text{oder} \quad r_1 \approx 0.786 \;\rightarrow\; h_0 = 1 \quad \text{und} \quad h_1 = 1.618$$

1.3 Vektorrechnung

Folgende Definitionen sind für folgende Kapitel nützlich zu kennen:

- Vektorprodukt: Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{u}$ mit der Länge $|\vec{u}|$, die dem Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes entspricht; der Vektor $\vec{u}$ steht dabei rechtwinklig in einem Rechtssystem auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{u} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt: Das Skalarprodukt s zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in n Dimensionen wird berechnet durch:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$
Dabei ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\alpha \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Folglich gilt für den Winkel α zwischen zwei beliebigen Vektoren:
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Im folgenden gilt für die Verwendung des Taschenrechners:

- `{x,y,z} sto [alpha]A` speichert den Vektor (oder Punkt) mit Koordinaten $(x|y|z)$ als ≪a≫.
- `a` gibt die Koordinaten des Vektors mit Name a aus (in diesem Fall `{x y z}`).
- Vektoren können durch die Verwendung der gewohnten Operationszeichen untereinander addiert und subtrahiert sowie mit beliebigen Faktoren (reellen Zahlen) multipliziert oder durch jene dividiert werden.
  Seien beispielsweise der Vektor a mit Koordinaten (8|4|3) und b mit (3|7|6) gespeichert, ergibt `b-a` `{-5 3 3}`. `a÷3` ergibt `{8/3 4/3 1}`.
- Vektor- und Skalarprodukt finden sich in `CATALOG` unter `dotP(` respektive `crossP(`. Beiden dienen als Argumente zwei Vektoren: `dotP(a,b)` ergibt `70`.
- Die Vektorlängenberechnung kann durch `√(x[1]^2+x[2]^2+x[3]^2))[sto]l(x)` in ≪l≫ als Funktion gespeichert werden. (Eine ähnliche Funktion stünde bereit durch `norm(` in `CATALOG`). Der Aufruf `l(a)` (oder `norm(a)`) liefert $\boxed{\sqrt{89}}$.
- Die Winkelberechnung wird durch `(dotP(x,y))/(l(x)· l(y))[sto]w(x,y)` stark vereinfacht; An die Funktion mit Name ≪w≫ können in Klammern die beiden Vektoren übergeben werden. `w(a,b)` ergibt (mit gedrückter Raute-Taste) `40.065`.

Aufgabe 1.13

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \vec{v} \perp \vec{u} \;\rightarrow\; m_{\vec{v}} = -(m_{\vec{u}}{}^{-1})$$

$$m_{\vec{u}} = -2 \;\rightarrow\; m_{\vec{v}} = \frac{1}{2} \qquad 0 < \{a, b \in \mathbb{N}\} < 7$$

$$x_{\vec{v}} = 2 \;\rightarrow\; y_{\vec{v}} = 1 \qquad x_{\vec{v}} = 4 \;\rightarrow\; y_{\vec{v}} = 2 \qquad x_{\vec{v}} = 6 \;\rightarrow\; y_{\vec{v}} = 3$$

$$P_{tot} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \qquad \rightarrow \qquad P(\vec{u} \perp \vec{v}) = \frac{3}{36}$$

Aufgabe 1.14

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = |a||b| \sin\alpha = \sqrt{173} \qquad \alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Die Aufgabe ist zu lösen entweder durch $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{173}$ oder:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} = \frac{2x + 3}{\sqrt{14 \cdot (x^2 + 13)}}$$

$$\sqrt{173} = |a| \cdot |b| \cdot \sin\alpha = \sqrt{14} \cdot \sqrt{x^2 + 13} \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{2x + 3}{\sqrt{14 \cdot (x^2 + 13)}}\right)\right)$$

$$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{6}{5} \to \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.15

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 5t \\ 2 &= t + s \\ 1 &= 2t - 2s \qquad \to \qquad x = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

1.4 Gerade in der xy-Ebene

Aufgabe 1.16

$$A(14|14) \quad B(0|0) \quad C(16|0) \to a(x) = 0 \to h_a \perp a \to h_a(y) = 14$$

$$|h_a| = 14 \qquad P = h_a \cap a = (14|0)$$

1.5 Gerade und Ebene im Raum

Aufgabe 1.17 (*) $\mathbb{E} : P(1|1|2)Q(|-3|6|4)R(0|-3|6)$

a) Ebenengleichung

$$\vec{n} \perp \mathbb{E} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E} : \ 28x + 14y + 21z = 84$$

b) Distanz zu Ursprung $O(0|0|0)$

$$\vec{n} \perp \mathbb{E} \text{ durch } (0|0|0);\ N = p \cap \mathbb{E}$$

$$28 \cdot (28t) + 14 \cdot (14t) + 21 \cdot (21t) = 84 \ \rightarrow\ t = \frac{120}{203} \ \rightarrow\ N\left(\frac{48}{29}\middle|\frac{24}{29}\middle|\frac{36}{29}\right)$$

$$\text{oder:}\quad t\vec{n} = P + s\overrightarrow{PQ} + r\overrightarrow{PR} = t \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{ON}| = \sqrt{\frac{48}{29}^2 + \frac{24}{29}^2 + \frac{36}{29}} \approx 2.228$$

c) Fusspunkt N

$$N\left(\frac{48}{29}\middle|\frac{24}{29}\middle|\frac{36}{29}\right)$$

d) Schnittpunkte mit den Achsen

$$\begin{array}{llcl} x\text{-Achse:} & 28 \cdot x + 14 \cdot 0 + 21 \cdot 0 = 84 & \rightarrow & X(3|0|0) \\ y\text{-Achse:} & 28 \cdot 0 + 14 \cdot y + 21 \cdot 0 = 84 & \rightarrow & Y(0|6|0) \\ z\text{-Achse:} & 28 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 21 \cdot x = 84 & \rightarrow & Z(0|0|4) \end{array}$$

Aufgabe 1.18 Quadrat $ABCD$, $M(3|2|-1)$, $A \in g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \mathbb{E}$

a)

$$\mathbb{E}_{\mathbb{E} \perp g; A, M \in \mathbb{E}} : 6x - 3y + 2z = 10 \quad \mathbb{E} \cap g = A$$

$$6 \cdot (-7 + 6\lambda) - 3 \cdot (14 - 3\lambda) + 2 \cdot (-2 + 2\lambda) = 10 \ \rightarrow\ \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad A(5|8|2)$$

$$B = A + 2 \cdot \overrightarrow{AM} \quad \rightarrow \quad C(1|-4|-4)$$

$$C = M + (g \times \overrightarrow{AM}) = M + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ -42 \end{pmatrix};\ |\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA}| \quad \rightarrow \quad B(6|4|-7)$$

$$D = 2 \cdot \overrightarrow{CM} \quad \rightarrow \quad D(0|0|5)$$

b) **(*)**

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{A \cdot h}{3} \text{ (def)}; \quad A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = 98$$

$$a = |\overrightarrow{AB}|; \quad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2a^2}}{2}\right)^2} = 7$$

$$V = \frac{7 \cdot 98}{3}$$

Aufgabe 1.19 $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A(1|-2|3),\ B(-4|12|1),\ C(9|-4|19)$

$$\{A, B\} \in h; \quad \{A, C\} \in i \qquad \text{Punkte } \hat{x} \in g \text{ mit } |\hat{x}h| = |\hat{x}i|$$

$$\{h, i\} = \mathbb{E}; \quad w : \angle(h, w) = \angle(i, w); \quad w \in \mathbb{F} \perp \mathbb{E}; \quad \mathbb{F} \cap g = \hat{x}$$

$$n \perp \{h, i\} = h \times i = \begin{pmatrix} -220 \\ -64 \\ 102 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{E} : -220x - 64y + 102z = 214$$

$$w = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5/45 \\ 37/45 \\ 34/45 \end{pmatrix}; W(6|35|37)$$

$$\mathbb{F}_{(n, \overrightarrow{AW})}; \ z \perp \mathbb{F} = \overrightarrow{AW} \times \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -2030 \\ 924 \\ -707 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F} : -2030x + 924y - 707z = -5999;$$

$$\mathbb{F} \cap g : -2030 \cdot (4 + \lambda) + 924 \cdot (-11 + 6 \cdot \lambda) - 707 \cdot (-15 + 7 \cdot \lambda) = -5999$$

$$\rightarrow \ \lambda = -\frac{48}{41} \ \rightarrow \ \hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -15 \end{pmatrix} - \frac{48}{41} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \left(\frac{116}{41}\middle| -\frac{739}{41}\middle| -\frac{951}{41}\right)$$

$$\hat{x}_2 = \mathbb{G}_{\perp g, A \in \mathbb{G}} \cap g; \ \mathbb{G} : x + 6y + 7z = 10$$

$$\mathbb{G} \cap g : \ (4+\lambda) + 6 \cdot (-11 + 6 \cdot \lambda) + 7 \cdot (-15 + 7 \cdot \lambda) = 10 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{177}{86} \ \rightarrow \ \hat{x}_2 \left(\frac{521}{86}\middle|\frac{58}{43}\middle| -\frac{51}{86}\right)$$

2 Repetition Algebra und Analysis

2.1 Komplexe Zahlen (*)

Im folgenden ist $i^2 = -1$. Eine komplexe Zahl z besteht aus einem reellen (a) und einem imaginären (b) Teil: $z = a + bi$. Bei Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division können die komplexen Zahlen wie gewohnt berechnet werden, wobei i als Variable (analog zu x) betrachtet werden kann. Bei graphischer Darstellung ist der Realteil auf der x-, der imaginäre Teil auf der y-Achse abzutragen. Die Länge $|z|$ ist dabei $\sqrt{a^2 + b^2}$ und für den Winkel φ zwischen der x-Achse und $\overrightarrow{Ox}$ (O: Nullpunkt) gilt entweder $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$ oder $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$. Daraus ergeht: $a = |z| \cdot \cos\varphi$ und $b = |z| \cdot \sin\varphi$. Aus $z = a + bi$ folgt: $z = a + bi = |z| \cdot \cos\varphi + |z| \cdot i \cdot \cos\varphi$. In Polarform: $z = |z| \cdot (\cos\varphi \cdot i \cdot \sin\varphi)$. Für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $a = r, \varphi$ und $b = s, \psi$ ist das das Resultat $t = a \cdot b, \varphi + \psi$.
$\bar{z}$ ist die konjugierte Form von z (wenn $z = a + bi$, so ist $\bar{z} = a - bi$).

Aufgabe 2.1 (*) $(z+\bar{z}+iz\bar{z})^7$ für $z=-1+2i$.

$$\begin{aligned}(z+\bar{z}+iz\bar{z})^7 &= ((-1+2i)+(-1-2i)+i(-1+2i)(-1-2i))^7\\ &= (-2+(-i+2i^2)(-1-2i))^7=(-2+(-2-i)(-1-2i))^7\\ &= (-2+2+4i+i+2i^2)^7=(-2+5i)^7=p^7=q\end{aligned}$$

$$|p|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29};\quad \varphi=\arctan\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\psi_q=7\cdot\varphi\approx 117.39^\circ;\quad |q|=\sqrt{29}^7\approx 131338.784$$

$$a_q=\cos\psi_q\cdot|q|=60422;\quad b_q=\sin\psi_q\cdot|q|=116615$$

$$q=(60422+116615i)$$

Aufgabe 2.2 (*) $w=\frac{z-1}{z-i}$; w reell.
Reelle Zahlen weisen in der Gauss'schen Zahlenebene eine y-Koordinate von 0 auf. Folglich muss $sin(\varphi_w)=0$ sein.

$$z=a+bi\ \rightarrow\ w=\frac{(a+bi)-1}{(a+bi)-i}=\frac{(a-1)+bi}{a+(b-1)i}=\frac{u}{v}$$

Für $w=\frac{u}{v}$ ist $\varphi_w=\varphi_v-\varphi_u$ mit $\varphi_w=0$ ist $\varphi_u=\varphi_v$.

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \arctan\left(\frac{b}{a-1}\right)\\ \varphi_v &= \arctan\left(\frac{b-1}{a}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \varphi_v\\ \arctan\left(\frac{b}{a-1}\right) &= \arctan\left(\frac{b-1}{a}\right)\\ \frac{b}{a-1} &= \frac{b-1}{a}\\ a\cdot b &= (b-1)\cdot(a-1)\\ a\cdot b &= a\cdot b-b-a-1\\ a &= -(b-1)\end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 (*) $z^3=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=n$

$$\varphi_n=\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\arctan\left(\frac{2}{2\cdot\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30^\circ$$

$$|n|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

$$z=\sqrt[3]{|n|}\cdot e^{i\cdot\varphi_n}=\sqrt[3]{1}\cdot e^{i\cdot 30^\circ}$$

$$z=a+bi\ \rightarrow\ a=\cos 10^\circ,\ b=\sin 10^\circ$$

$$z=e^{i\frac{\pi}{18}+\frac{n\pi}{3}};\ 0\leq n\in\mathbb{N}<3$$

Aufgabe 2.4 (*) $z^2 - 2(1+i\sqrt{3})z + 8(-1+i\sqrt{3}) = 0$

$$a = 1 \qquad b = 2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot i \qquad c = -8 + 8\cdot\sqrt{3}\cdot i$$

$$\text{Diskriminante } D = b^2 - 4ac = 24 - 24\cdot\sqrt{3}i; \quad d = \sqrt{D} = 6 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot i$$

$$x_1 = \frac{-b+d}{2a} = 2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot i \qquad x_2 = \frac{-b-d}{2a} = -4$$

2.2 Gleichungen n-ten Grades (*)

Sei im folgenden n die erste Nullstelle des Polynoms, so ist dieses durch $(x-n)$ zu dividieren; in der resultierenden Vereinfachung kann eine weitere Nullstelle gefunden werden; so ist zu verfahren, bis in $\mathbb{C}$ r Lösungen gefunden wurden, wobei r dem Grad des Polynoms entspricht. Der Rechner löst Gleichungen in $\mathbb{C}$ mithilfe der Funktion `cSolve`.

Aufgabe 2.5 (*) $x^4 - 8x^3 + 48x^2 - 128x + 87 = 0$

$$\rightarrow \text{ Nullstelle: 1;} \quad (x^4 - 8x^3 + 48x^2 - 128x + 87) \div (x-1) = x^3 - 7x^2 + 41x - 87$$

$$\rightarrow \text{ Nullstelle: 3;} \quad (x^3 - 7x^2 + 41x - 87) \div (x-3) = x^2 - 4x + 29$$

$$\rightarrow \text{ Diskriminante } D = b^2 - 4ac = -100 \ \rightarrow \text{ zwei Lösungen in } \mathbb{C}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = 2 \pm 5i$$

Aufgabe 2.6 (*) $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x + 20 = 0$

$$x_0 = 1+i; \quad x_1 = 1-i; \quad x_2 = -2+i; \quad x_3 = -2-i; \quad x_4 = -2$$

Aufgabe 2.7 (*) $z^4 + az^3 + bz^2 - 2z + 1 + 2i = 0 \quad a, b$ sodass $z = \pm i$
Einsetzen der Lösungen i und $-i$ ergibt:

$$\begin{aligned} 2 - b - ai &= 0 \\ z - b + (a+4)i &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \ a = -2; \quad b = 2 + 2i$$

$$z_1 = 2 - i; \quad z_2 = -i; \quad z_3 = i; \quad z_4 = i$$

Aufgabe 2.8 (*) $2x^3 - 5x^2 + 6x - 7 = 0$ mit x_1, x_2, x_3. Gleichung dritten Grades mit ${x_1}^2$, ${x_2}^2$, ${x_3}^2$.

$$x_1 \approx 0.304 + 1.326i \qquad x_2 \approx 0.304 - 1.326i \qquad x_3 \approx 1.892$$

$$\begin{aligned} (x - x_1^2)\cdot(x - x_2^2)\cdot(x - x_3^2) &= 0 \\ (x - (0.304 + 1.326i)^2)\cdot(x - (0.304 - 1.326i)^2)\cdot(x - 1.892^2) &= 0 \\ x^3 - 0.25x^2 - 8.5x - 12.25 &= 0 \end{aligned}$$

2.3 Funktionen, Wachstum, Zerfall

Aufgabe 2.9 75% Verlust pro Meter Tiefe. $I_0 = 120\,\mathrm{W/m^2}$.

a) $10 \leq 0.25^x \leq 60 \;\rightarrow\; \log_{0.25}\frac{1}{12} < x < \log_{0.25}\frac{1}{2} \;\rightarrow\; 0.5 \leq x \leq 1.792$
≪Die Algen sind in einem Bereich von 50 cm bis 1.792 m unter Wasser überlebensfähig.≫

b) $I = 120 \cdot 0.25^{100} \approx 7.468 \cdot 10^{-59}\,\mathrm{Wm^{-2}}$

Aufgabe 2.10 Masse m nimmt exponentiell mit der Zeit t ab.

a) Zerfall: 13% pro Tag; $t_0 = 0$: $m = 10\,\mathrm{g}$.

$$m(t) = m_0 \cdot 0.87^t = 0.01 \cdot 0.87^t\,\mathrm{kg}\ (\text{t in Tagen})$$

$$m(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}m_0 = m_0 \cdot 0.87^{t_{\frac{1}{2}}} \;\rightarrow\; t_{\frac{1}{2}} = \log_{0.87} 0.5 \approx 4.977 \text{ Tage}$$

b) $m_0 = 4\,\mathrm{mg}$; $m(2) = 2.25\,\mathrm{mg}$

$$m(t) = m_0 \cdot p^t \;\rightarrow\; p = \sqrt[t]{\frac{m(t)}{m_0}} = \sqrt{\frac{2.25}{4}} = 0.75 \;\rightarrow\; m(t) = 0.004 \cdot 0.75^t\,\mathrm{kg}\ (t \text{ in h})$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \log_{0.75} 0.5 \approx 2.409 \text{ Stunden}$$

c) $m(100) = 79.04\,\mathrm{g}$; $m(10^3) = 70.88\,\mathrm{g}$.

$$m(t) = m_0 \cdot p^t \;\rightarrow\; m_0 = \frac{m(t)}{p^t} \;\rightarrow\; \frac{79.04}{p^{100}} = \frac{70.88}{p^{1000}} \;\rightarrow\; p \approx 0.999879$$

$$m_0 \approx \frac{79.04}{0.999878^{100}} \approx 80.003\,\mathrm{g} \;\rightarrow\; m(t) \approx 80.003 \cdot 0.999879^t (\text{t in Jahren})$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \log_{0.9999} 0.5 = 5725.033 \text{ Jahre}$$

Aufgabe 2.11

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \;\rightarrow\; \sqrt[n]{0} = 0 \;\rightarrow\; && \text{Funktion durch } (0|0) \text{ und } (1|1)\\
g(x) &= \log_a x \;\rightarrow\; \log_a 0 = 1 \;\rightarrow\; && \text{Funktion durch } (1|0) \text{ mit } \lim_{x\to 0} = -\infty\\
h(x) &= x^{-n} \;\rightarrow\; 1^{-n} = 1 \;\rightarrow\; && \text{Funktion durch } (1|1) \text{ mit } \lim_{x\to\infty} = 0\\
j(x) &= a^{-x} \;\rightarrow\; a^0 = 1 \;\rightarrow\; && \text{Funktion durch } (0|1) \text{ mit } \lim_{x\to\infty} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.12 5% Wachstum jährlich

a) $1.05^8 = 1.477$
≪Die Grösse wächst innert acht Jahren um 47.4%≫.

b) $1.05^t = 2 \;\rightarrow\; t = 14.207$
≪Die Grösse verdoppelt sich nach 14 Jahren und rund drei Monaten≫.

2.4 Folgen, vollständige Induktion

Vollständige Induktion: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ oder $S_n = S_{n-1} + a_n$ mit jeweils $n \in \mathbb{N}$.
Der Taschenrechner nutzt Folgen anstelle von Funktionen durch Änderung der Auswahl `Graph` unter $\boxed{\texttt{MODE}}$ von `FUNCTION` zu `SEQUENCE`. Die Folgen werden durch `u1(n)` bis `u99(n)` angesprochen, können, wie gewohnt, durch $\boxed{\Diamond}$ $\boxed{\texttt{F1}}$ gespeichert und angesprochen werden; `ui` ist dabei der Anfangswert einer Folge.

Aufgabe 2.13 (*) $a_n = \frac{1}{(3 \cdot n - 2)(3 \cdot n + 1)}$.

$$a_1 = \frac{1}{4}; \quad a_2 = \frac{1}{28}; \quad a_3 = \frac{1}{70}; \quad a_4 = \frac{1}{130}$$

$$S_1 = \frac{1}{4}; \quad S_2 = \frac{2}{7}; \quad S_3 = \frac{3}{10}; \quad S_4 = \frac{4}{13} \;\rightarrow\; S_n = \frac{n}{3 \cdot n + 1}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= S_{n-1} + a_n \\
\frac{n}{3 \cdot n + 1} &= \frac{n-1}{3 \cdot (n-1) + 1} + \frac{1}{(3 \cdot n - 2)(3 \cdot n + 1)} \\
&= \frac{n-1}{3 \cdot n - 2} + \frac{1}{(3 \cdot n - 2)(3 \cdot n + 1)} \\
&= \frac{(n-1)(3 \cdot n + 1)}{(3 \cdot n - 2)(3 \cdot n + 1)} + \frac{1}{(3 \cdot n - 2)(3 \cdot n + 1)} \\
&= \frac{3n^2 - 2n}{(3 \cdot n - 2)(3 \cdot n + 1)} \\
&= \frac{n \cdot (3 \cdot n - 2)}{(3 \cdot n - 2)(3 \cdot n + 1)} \\
\frac{n}{3 \cdot n + 1} &= \frac{n}{3 \cdot n + 1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.14 $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots$

a) Reihe der Nenner: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, $\ldots$, $n \cdot \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$$\rightarrow \; a_n = \frac{1}{n \cdot \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{n^2}{2} + n2} = \frac{2}{n^2 + n}$$

b) Summe: $\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{9}{6}, \frac{16}{10}, \frac{25}{15}, \frac{36}{21}, \frac{49}{28} \ldots$

$$\rightarrow \; S_n = \frac{n^2}{n \cdot \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{n^2}{\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}} = \frac{2 \cdot n^2}{n^2 + n} = \frac{n \cdot (2 \cdot n)}{n \cdot (n+1)} = \frac{2 \cdot n}{n+1}$$

c) **(*)**

$$\begin{aligned}
S_n &= S_{n-1} + a_n \\
\frac{2 \cdot n}{n+1} &= \frac{2 \cdot (n-1)}{(n-1)+1} + \frac{2}{n^2+n} \\
&= \frac{2 \cdot n - 2}{n} + \frac{2}{n^2+n} \\
&= \frac{(2 \cdot n - 2)(n+1)}{n \cdot (n+1)} + \frac{2}{n^2+n} \\
&= \frac{2 \cdot n^2 - 2}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} \\
\frac{2 \cdot n}{n+1} &= \frac{2 \cdot n}{n+1}
\end{aligned}$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n}{n+1} = 2$$

e) **(*)**

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{v} \frac{2}{k^2+k} = \frac{2 \cdot v}{v+1} \right) &< \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n}{n+1} - 10^{-3} \\
\frac{2 \cdot v}{v+1} &> 1.999 \\
2 \cdot v &< 1.999 \cdot v + 1.999 \\
0.001 \cdot v &< 1.999 \\
v &= 1.999
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.15 $10 + 11 \ldots$

a) Dies ist eine geometrische Reihe mit $q = 11/10$.

$$a_n = 10 \cdot 1.1^{n-1} \qquad S_n = 10\frac{1-1.1^n}{-0.1} = 100(1.1^n - 1) < 10^6$$

Es sind 97 Folgenglieder nötig.

b)

$$a_n = 0.1 \cdot (10/11)^{n-1} \qquad S_\infty = \frac{1}{10}\frac{1}{1/11} = 1.1$$

Aufgabe 2.16 **(*)** $a_0 = 2; \quad a_1 = -1; \quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n; \quad n \in \mathbb{N}$
Gesucht: p, q mit $a_n = p^n + q^n$

a) Aus den ersten Folgengliedern ist ersichtlich: $q = 2$ und $p = -3$. Diese Behauptung stimmt für $n = 1$ und $n = 2$.
Für den weiteren Beweis ist die geschlossene Form in die rekursive Form einzusetzen:

$$(-3)^{n+2} + 2^{n+2} = -((-3)^{n+1} + 2^{n+1}) + 6 \cdot ((-3)^n + 2^n)$$

Die Gleichung stimmt.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + (-3)^{n+1}}{2^n + (-3)^n} = -3$$

2.5 Grenzwert bei Funktionen

Aufgabe 2.17 $f(x) = \frac{x^3+t\cdot x+2}{x^2}$ schneidet Asymptote $a(x)$ rechtwinklig.

$$\frac{x^3 + t\cdot x + 2}{x^2} = x + \frac{t}{x} + \frac{2}{x^2} \;\rightarrow\; a(x) = x$$

Bei $f(x) = a(x)$ [Schnittpunkt] muss $f'(x) = -x$ [rechtwinklig zu $a(x) = x$] sein.

$$f'(x) = \frac{x^3 - t\cdot x - 4}{x^3}$$

[Schnittpunkt]:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) \\ \frac{x^3 + t\cdot x + 2}{x^2} &= x \\ x &= -\frac{2}{t} \end{aligned}$$

[Rechtwinklig]:

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{2}{t}\right) &= -x \\ \frac{x^3 - t\cdot x - 4}{x^3} &= -x \quad \text{mit } x = -\frac{2}{t} \\ \frac{t^3+4}{4} &= \frac{2}{t} \\ t_1 &\approx 1.296 \qquad t_2 = -2 \end{aligned}$$

2.6 Ableitung, Ableitungsregeln

Aufgabe 2.18 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1+x^2} &= \frac{u(x)}{v(x)} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} \\ &= \frac{\cos x\cdot(1+x^2) - \sin x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ f'(x) &= \frac{\cos x}{x^2+1} - \frac{\sin x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.19 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ für $f(x) = (\sin x)^{\arctan\sqrt{x}}$
Die Ableitung der Sinusfunktion $\sin x$ an Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ist, wie oft sie auch multipliziert (potenziert) wird, immer null.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Aufgabe 2.20 $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$

$$(ln|x|)' = \frac{1}{x}; \qquad g(h(x))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = \underbrace{\ln}_{g(x)} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{h(x)}$$

$$h(x) = \frac{1}{1-x} = u(v(x))$$

$$u(x) = \frac{1}{x} \;\rightarrow\; u'(x) = \frac{-1}{x^2} \text{ und } v(x) = 1 - x \;\rightarrow\; v'(x) = -1$$

$$h'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot -1 = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{array}{llll}
f'(x) = & \frac{1}{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = -(x-1) \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-1 \cdot (x-1)}{(x-1)^2} & = \dfrac{-1}{x-1} \\
f''(x) = & \left(\frac{-1}{x-1}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2} \cdot 1 & = \dfrac{1}{(x-1)^2} \\
f'''(x) = & \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{1}{((x-1)^2)^2} \cdot 2 \cdot (x-1) & = \dfrac{-2}{(x-1)^3} \\
f''''(x) = & \left(\frac{-2}{(x-1)^3}\right)' = \frac{-2}{((x-1)^3)^2} \cdot 3 \cdot (x-1)^2 & = \dfrac{6}{(x-1)^4}
\end{array}$$

Es handelt sich dabei um eine Folge: $f^{(n)} = a_n = \frac{a_{n-1} \cdot (-n+1)}{(x-1)^n}$; die Aussage erfolgt ohne Beweis.

Aufgabe 2.21 $f(x) = (2 \cdot x + 1) \cdot e^x$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f(x) = \underbrace{(2 \cdot x + 1)}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} \qquad u'(x) = 2 \qquad v'(x) = e^x$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \cdot e^x + (2 \cdot x + 1) \cdot e^x = (2 \cdot x + 3) \cdot e^x \\
f''(x) &= (2 \cdot x + 5) \cdot e^x \\
f'''(x) &= (2 \cdot x + 7) \cdot e^x \\
f^{(n)}(x) &= (2 \cdot x + 2 \cdot n + 1) \cdot e^x
\end{aligned}$$

Die Annahme $f^{(n)}(x) = (2 \cdot x + 2 \cdot n + 1) \cdot e^x$ ist für $f'(x)$ wahr. Von $f^n(x)$ ist auf $f^{(n+1)}(x)$ zu schliessen:

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
f^{n+1} &= (u^n)' \cdot v^n + u^n \cdot (v^n)' \\
&= (u^n)' \cdot e^x + u^n \cdot e^x \quad \text{mit der Annahme } u^n = (2 \cdot x + 2 \cdot n + 1) \text{ und } v^n = e^x \\
&= (2 \cdot x + 2 \cdot n + 1)' \cdot e^x + (2 \cdot x + 2 \cdot n + 1) \cdot e^x \\
&= 2 \cdot e^x + (2 \cdot x + 2 \cdot n + 1) \cdot e^x \\
&= (2 \cdot x + 2 \cdot n + 3) \cdot e^x \\
&= (2 \cdot x + 2 \cdot (n + 1) + 1) \cdot e^x
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.22 Tangente $t(x)$ aus $P(0|0)$ berührt $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ in B.

$\rightarrow$ $t(x) = n \cdot x$ (Gerade durch P) und $t'(x) = f'(x)$ in B.

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \qquad t'(x) = n$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= t'(x) \\ n &= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \end{aligned}$$

Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} t(x) &= f(x) \\ \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \cdot x &= e^{\frac{x}{2}} \\ x &= 2 \rightarrow y = f(2) = e \end{aligned}$$

$$B(2|e) \quad \text{und} \quad t(x) = \frac{e}{2} \cdot x$$

Aufgabe 2.23 $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \tan x$; Gesucht: $\angle(f, g)$

Schnittpunkt: $\cos x$ ist $2 \cdot \pi$-, $\tan x$ π-periodisch. Die beiden Funktionen schneiden sich jeweils in $w \cdot n \cdot \pi$ und $\pi - w \cdot n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f(w) &= g(w) \quad \text{und} \quad 0 < w < \pi \\ \cos w &= \tan w \\ w &\approx 0.666 \end{aligned}$$

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x \qquad g'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$f'(w) \approx -0.618 \qquad g'(x) \approx 1.618$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \\ &\approx \arccos\left(\frac{(1|-0.618) \cdot (1|1.618)}{|(1|-0.618)| \cdot |(1|1.618)|}\right) \\ \alpha &= 90^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe 2.24 $f(x) = e^x$ und $g(x) = ax^3$ tangential.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \\ e^x &= 2 \cdot a \cdot x^2 \\ a &= \frac{e^x}{3 \cdot x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ e^x &= \frac{e^x}{3 \cdot x^2} \cdot x^3 \\ x &= 3 \qquad y = e^3 \end{aligned}$$

$$a = \frac{e^3}{27}$$

2.7 Kurvendiskussion, Extremwertaufgaben, Newton

Aufgabe 2.25 Diskussionen

a) $f(x) = \frac{x^2-4\cdot x+3}{2\cdot x+3}$
Nullstellen: $x_0 = 3$ und $x_1 = 1$
Asymptote: $a(x) = \frac{x}{2} - \frac{11}{4}$
Verhalten bei $x = -\frac{3}{2}$: Pol mit Vorzeichenwechsel
Lokales Maximum ca. in $(-4.854|-6.854)$
Lokales Minimum ca. in $(1.854|-0.146)$

b) $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$
In $\mathbb{R}$ ist die Funktion nur für $x > 0$ definiert.
Verhalten bei $x = 0$: Für $x > 0$ Pol von $y > 0$ her kommend
Minimum in $(2|\ln(2)+1)$ $(\approx (2|1.693))$

Aufgabe 2.26 (*) $f(x) = (x-a)\cdot e^x$ mit $P(0|0)$ auf Tangente $t(x)$ durch Wendepunkt.

$$f'(x) = (x-a+1)\cdot e^x \qquad f''(x) = (x-a+2)\cdot e^x$$

Wendepunkt x_w: $f''(x_w) = 0 \;\rightarrow\; x_w = a-2$
Tangente $t(x)$ durch $x_w \in f(x)$ an $f(x)$ mit Steigung $f'(x)$:

$$f'(x_w) = -e^{a-2}$$

Für Geraden gilt: (wobei $b = 0$ ist, da die Gerade durch $(0|0)$ gehen soll.

$$\begin{aligned} y &= a\cdot x + b \\ f(x_w) &= a\cdot x_w \\ -2\cdot e^{a-2} &= -e^{a-2}\cdot(a-2) \\ a &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.27 $f_t(x) = x^2 \cdot \ln\frac{1}{t\cdot x}$ mit $t > 0$

a) Für $x = 0$ ist die Funktion nicht definiert; für $x < 0$ liegt ihr Wertebereich nicht mehr in $\mathbb{R}$.
Der Graph beschreibt eine Kurve von $(0|0)$ ≪aufwärts≫ und fällt danach wieder; je kleiner t ist, desto höher (und weiter ≪rechts≫) liegt das Maximum und desto später beginnt er zu fallen. Für grosse t (> 1) liegt das Maximum dem Nullpunkt sehr nahe, die Steigung ist sehr gering, der Graph fällt sehr schnell.

b) siehe Abbildung 1 auf Seite 17.

c) (Siehe dazu Abb. 4) Die Höhepunkte werden jeweils bei $f'(x) = 0$ erreicht; die Funktion $h(t)$ der x-Koordinate der Höhepunkte ist:

$$h(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{t}$$

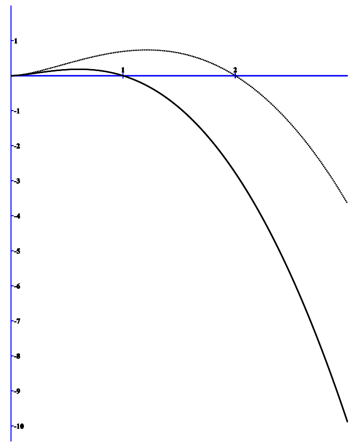

Abbildung 1: zu Aufgabe 2.27b: Graphen zu $f(x) = x^2 \cdot ln(\frac{1}{t \cdot x})$; obere Linie für $t = \frac{1}{2}$, untere für $t = 1$

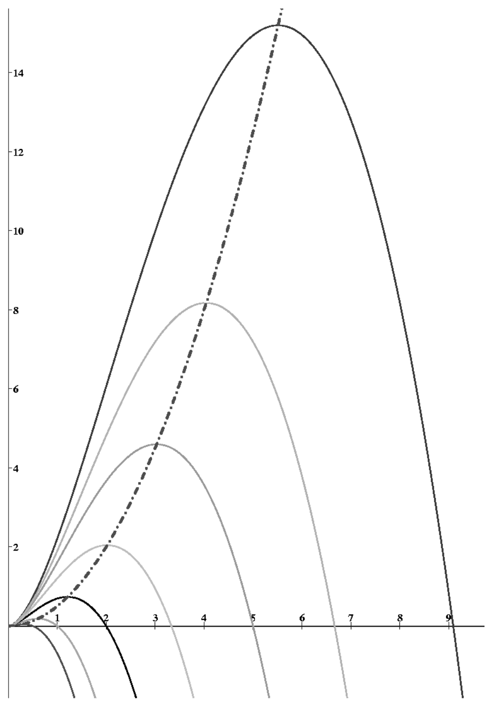

Abbildung 2: zu Aufgabe 2.27c: Illustration der Kurve durch die Höhepunkte

Wir können $h(x)$ für t in $f(x)$ einsetzen und erhalten durch Kürzen für die Kurve $g(x)$ der Höhepunkte:

$$g(x) = \frac{x^2}{2}$$

Siehe auch Abbildung 4 auf Seite 17.

Aufgabe 2.28 Quadratische Parabel durch Wendepunkt von $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$ und $P(4|y) \in f(x)$
Wendepunkt: $f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x_w = 0$ und $y_w = 2$; $f'''(x_w) \neq 0$
Punkt $P(4|y)$: $y = f(4) = 4 \;\rightarrow\; P(4|4)$.
Wir suchen eine quadratische Parabel $(a{\cdot}x^2{+}b{\cdot}x{+}c)$ durch $W(0|2)$ und $P(4|4)$; eine Parabel wird durch mindestens drei Punkte bestimmt; ergo bleibt uns eine Variable erhalten.

$$\begin{aligned} y &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ 2 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \;\rightarrow\; c = 2 \\ 4 &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 2 \;\rightarrow\; b = \frac{1 - 8 \cdot a}{2} \end{aligned}$$

Für die Parabel $g(x)$ folgt daraus:

$$g(x) = a \cdot x^2 + \frac{1 - 8 \cdot a}{2} \cdot x + 2$$

Aus der Bedingung, dass die Parabel tangential in P sein soll, folgt

$$\begin{aligned} g'(4) &= f'(4) \\ 2 \cdot 4 \cdot a - \frac{8 \cdot a - 1}{2} &= \frac{3 \cdot 4^2}{8} - \frac{3}{2} \\ 8 \cdot a - \frac{8 \cdot a - 1}{2} &= \frac{48}{8} - \frac{3}{2} \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$g(x) = x^2 - \frac{7}{2} \cdot x + 2$$

Aufgabe 2.29 Gleichseitiges Trapez; Basiswinkel α, Schenkellänge b, Basislänge a, Höhe h und Oberlänge d; $c = \frac{a-d}{2}$; $A(\alpha)$ maximal.

$$h = \sin\alpha \cdot b \qquad c = \cos\alpha \cdot b$$

$$A(\alpha) = h \cdot \left(\frac{a+d}{2}\right) = h \cdot \left(\frac{2 \cdot a - 2 \cdot c}{2}\right) = (\sin\alpha \cdot b) \cdot \left(\frac{2 \cdot a - 2 \cdot b \cdot \cos\alpha}{2}\right)$$

$$A'(\alpha_{max}) = 0 \;\rightarrow\; \alpha_{max} = \frac{\pm\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{a}{b}\right) \;\text{ für } -1 \leq \frac{a}{b} \leq 1$$

Aufgabe 2.30 Kreis $k : r = 1\; M(0|0)$; gleichschenkliges Dreieck ABS mit Spitze $S(-1|0)$; x Abstand der Dreiecksbasis zu M

a) Volumen V_k des Kegels durch Drehen des Dreiecks um x-Achse maximal. Sei $\alpha = \angle(\overline{MA}, y = 0)$, so ist der Radius r des Kegels $y_A = -y_B = \sin\alpha = r$ und die Höhe $\overline{SM} + \cos\alpha = 1 + \cos\alpha$; x ist gleich $h - 1 = \cos\alpha$.

$$V_k = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h \sim r^2 \cdot h$$

$$f(\alpha) = r^2 \cdot h = (\sin\alpha)^2 \cdot (1 + \cos\alpha); \quad f'(\alpha_{max} = 0 \;\rightarrow\; \alpha_{max} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x = \cos\alpha_{max} = \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

b) Flächeninhalt $A_\triangle$ von ABS maximal

$$A_\triangle(\alpha) = \frac{h \cdot 2 \cdot r}{2} = h \cdot r = \sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)$$

$$A'_\triangle(\alpha_{max}) = 0 \;\rightarrow\; \alpha_{max} = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \cos\alpha_{max} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.31 Würfel $(0|0|0)$, $(5|0|0)$, $(0|5|0)$, $(0|0|5)$; Dreieck $(t|0|0)$, $(0|t|0)$, $(0|0|t)$ eingeschrieben; Schnittfläche maximal.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist für $t \leq 5$:

$$A_\triangle(t \leq 5) = \frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{\sqrt{2 \cdot t^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot |t|}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot t^2}{2}$$

Für $t \geq 5$ fallen jeweils drei gleichseitige Dreiecke «aus dem Würfel». Es gilt sodann:

$$A_\triangle(t \geq 5) = \frac{\sqrt{3} \cdot t^2}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot (t-5)^2}{2}$$

Das Maximum ($A'_\triangle(t \geq 5) = 0$ respektive $A'_\triangle(t \leq 5) = 0$ (wobei die Resultate in die Funktionen eingesetzt werden und das grössere der beiden gewinnt) liegt bei $t = 7.5$.
Aufgabe 2.32 Siehe auch Abbildung 3 auf Seite 20. Die Figur kann mit einer «Cornet»-Glacé verglichen werden, die «nahtlos» von Kegel in Kugel übergeht; die Gesamtoberfläche S ist gleich Oberflächen für Kegel (S_K) und Kugelsegment (S_S); sie soll in Abhängigkeit von der Länge der Mantellinie x minimal werden.

$$S_K = \pi \cdot r \cdot (r + x) = \pi \cdot (1 + x) \qquad S_S = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot (n + w)$$

Sei im folgenden $h = \sqrt{x^2 - 1}$ die Höhe des Kegels (mit Radius $r = 1$), F der Fusspunkt, S die Spitze, M der Mittelpunkt der Kugel (dem «Ganzen» des Kugelsegmentes), w der Abstand $\overline{MH}$; sei T der Schnittpunkt einer (beliebigen) Mantellinie x mit dem Kugelsegment und n die Strecke $\overline{TM}$.
Es bestehen drei rechtwinklige Dreiecke: STF, STM (da die Tangente zum Mittelpunkt rechtwinklig ist) und TFM. Ergo gilt:

$$h^2 + 1 = x^2 \qquad n^2 = 1 + w^2 \qquad (h + w)^2 = x^2 + n^2$$

$$(h + w)^2 = x^2 + \sqrt{1 + w^2}^2 \;\rightarrow\; w = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \;\rightarrow\; n = \sqrt{1 + w^2}$$

$$S(x) = S_S + S_K \qquad S'(x_{min}) = 0 \;\rightarrow\; x_{min} = \sqrt{2} + 1$$

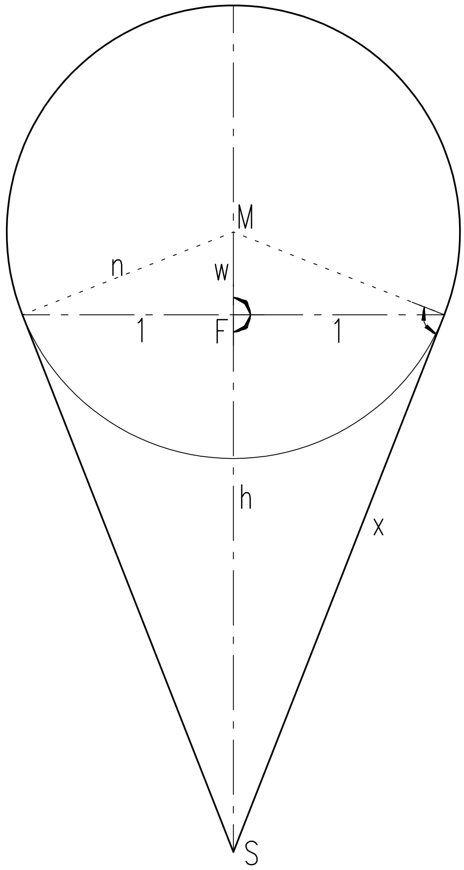

Abbildung 3: Kegel mit «aufgesetztem» Kugelsegment

Aufgabe 2.33 $f(x) = \ln x$; Punkt $P \in f(x)$ mit $\overline{OP} = d$ minimal.
Jeder Punkt $\hat{P} \in f(x)$ hat die Koordinaten $(x|f(x))$ und bildet ein rechtwinkliges Dreieck $(x_{\hat{P}}, O, y_{\hat{P}}$; die Hypotenuse des Dreieckes entspricht d:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2}$$

$$\rightarrow \ d'(x) = 0 \ \rightarrow \ x \approx 0.653 \ \rightarrow \ P(0.653| - 0.426)$$

2.8 Integrationsregeln

Aufgabe 2.34

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})\, dx &= \int_{-2}^{2} (a \cdot x^2 + 1)\, dx \\
\left(\frac{x^3 \cdot a}{3} + x\right)\bigg|_{-2}^{2} &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (e^x + e^{-x})\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x\big|_{-2}^{2} + \left(-e^{-x}\right)\big|_{-2}^{2}\right) \quad \left[= \sinh(x)\big|_{-2}^{2}\right] \\
\frac{8 \cdot a}{3} + 2 - \frac{-8 \cdot a}{3} + 2 &= \frac{1}{2} \cdot e^2 - e^{-2} + (-e^{-2}) - (-e^2) \quad [= \sinh 2 - \sinh(-2)] \\
\frac{16 \cdot a + 12}{3} &= \frac{1}{2} \cdot e^2 - e^{-2} + (-e^{-2}) - (-e^2) \quad [= 2 \cdot \sinh 2] \\
a &= \frac{\frac{1}{2} \cdot e^2 - e^{-2} + (-e^{-2}) - (-e^2) - 4}{16} \\
a &= \frac{3 \cdot (e^4 - 4 \cdot e^2 - 1) \cdot e^{-2}}{16} \\
a &\approx 0.610
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.35 (*) $I_n = \int_1^e \underbrace{x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(\ln x)^n}_{v(x)}\, dx$

a)

$$I_1 = \int_1^e x \cdot (\ln x)\, dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

b)

$$u'(x) = x \ \rightarrow \ u(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \qquad v(x) = \ln(x)^n \ \rightarrow \ v'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_1^e x \cdot (\ln x)^n \, dx \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln x)^n\right)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^{n-1} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_1^e x \cdot (\ln x)^{n-1} \, dx}_{I_{n-1}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2} I_{n-1}
\end{aligned}
$$

c)

$$I_4 = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$$

Aufgabe 2.36

a)

$$w(x) = \int \frac{-5 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 9}{x^2} \, dx = \int \underbrace{(-5 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 9)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{f'(x)} \, dx$$

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f(x) = \frac{-1}{x} \qquad g(x) = -5 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 9 \rightarrow g'(x) = -10 \cdot x + 18$$

$$
\begin{aligned}
w(x) &= \left(\frac{-1}{x} \cdot (-5 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 9)\right) - \int \underbrace{\frac{-1}{x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(-10 \cdot x + 18)}_{v(x)} \, dx \\
&= \frac{5 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 9}{x} - \left(u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx\right) \\
&= \frac{5 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 9}{x} - \left((-\ln x) \cdot (-10 \cdot x + 18) - \int -10 \cdot -ln(x) \, dx\right) \\
&= \frac{5 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 9}{x} - (10 \cdot x \cdot \ln x - 18 \cdot \ln x - 10 \cdot x \cdot \ln x + 10 \cdot x) \\
&= \frac{5 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 9}{x} + 18 \cdot \ln x - 10 \cdot x \\
&= \frac{5 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 9 + 18 \cdot x \cdot \ln x - 10 \cdot x^2}{x} \\
&= \frac{18 \cdot x \cdot \ln x - 5 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 9}{x}
\end{aligned}
$$

Einfacher wäre es, $\frac{-5 \cdot x^2 + 18 \cdot x + 9}{x^2}$ durch Aufteilung in $-4 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2}$ zu integrieren. Dabei ist 18 die (eigentlich beliebige) Zahl c, die zu jedem Integral gehört.

b) **(*)** $\int\limits_0^2 \frac{x^2+4\cdot x+1}{(x+1)}\,dx = F(x)$

$$z = (x+1) \text{ def. } \rightarrow \; F(x) = \int\limits_1^3 \frac{(z-1)^2 + 4\cdot(z-1)+1}{z}\,dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_1^3 \frac{z^2 - 2\cdot z + 1 + 4\cdot z - 4 + 1}{z}\,dz = \int\limits_1^3 z + e - \frac{2}{z}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\cdot z^2 + 2\cdot z - 2\cdot \ln z\Big|_1^3 \\
&= \frac{9}{2} + 6 - 2\cdot \ln 3 - \frac{1}{2} - 2 \\
&= 8 - 2\ln 3
\end{aligned}$$

2.9 Flächen- und Volumenberechnungen mit Integralen

Aufgabe 2.37 $f(x) = 3\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 6x$

a) Maximum $(0.423|1.15)$, Minimum $(1.577|-1.15)$
Nullstellen bei $x=0$ und $x=1$ und $x=2$

b) Tangente an den Wendepunkt bei $x=1$: $t(x) = -3x+3$

$$A = \int\limits_0^1 t(x) - f(x)\,dx = 3/4$$

Aufgabe 2.38 $f(x) = (a+1)\cdot x - a\cdot x^3$ mit $a>0$

a) Die Fläche, die $f(x)$ mit der Positiven x-Achse einschliesst, soll extremal werden.
Die Schnittpunkte von $y=0$ mit $f(x)$ sind:

$$f(x) = 0 \;\rightarrow\; x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} \qquad \left[x_2 = -\frac{\sqrt{a+1}}{a}\right]$$

$$\int\limits_0^{\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}}} f(x)\,dx = v(a) \;\rightarrow\; v'(a) = 0 \text{ für Extremum}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{-\left(a\cdot\left(x^2-1\right)-1\right)^2}{4\cdot a}$$

$$v(a) = \frac{-\left(a\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}}\right)^2-1\right)-1\right)^2}{4\cdot a} - \frac{-\left(a\cdot\left(0^2-1\right)-1\right)^2}{4\cdot a} = \frac{(a+1)^2}{4\cdot a}$$

$$v'(a) = \frac{(a-1)\cdot(a+1)}{4\cdot a^2} = 0 \;\rightarrow\; a_{ext} = 1 \text{ (oder } -1 < 0)$$

$$h(x) = 2\cdot x - x^3 \qquad A = \int\limits_0^{\sqrt{2}} h(x)\,dx = 1$$

Bei diesem Extremum (d. h. dieser Fläche) handelt es sich um ein Minimum.

b)

$$V = \pi \cdot \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(2\cdot x - x^3\right)^2\,dx = \frac{64\cdot\pi\cdot\sqrt{2}}{105} \approx 2.708$$

c) Maximum von $h(x)$ bei $h'(x) = 0$, d. h. $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$A = r^2\cdot\pi = \left(f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right)^2\cdot\pi = \frac{32}{27}\cdot\pi \approx 3.723$$

Aufgabe 2.39 $f(x) = \frac{2\cdot x}{1+x^2}$

a) Diskussion
$\lim\limits_{x\to\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} = 0$
Maximum in $(1|1)$, Minimum in $(-1|-1)$
Schneidet die x-Achse in $x = 0$
Vor $x = -1$ stetig fallend, $]-1;1[$ stetig steigend, nach $x = 1$ stetig fallend

b) $g(x) = x$

$$G = \int\limits_0^1 f(x) - g(x)\,dx = ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0.193$$

c) Länge $l(x) = f(x) - g(x)$ maximal für $0 \leq x \leq 1$

$$l(x) = f(x) - g(x) = \frac{2\cdot x}{x^2+1} - x \;\rightarrow\; l'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0.486$$

Aufgabe 2.40 $f(x) = 3\cdot\sqrt{x}$ und $g(x) = \sqrt{36 - 3\cdot x}$

$$f(x) = g(x) \;\rightarrow\; x = 3 \qquad f(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \qquad g(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 12$$

$$V = \pi\cdot\left(\int\limits_0^3 f(x)^2\,dx + \int\limits_3^{12} g(x)^2\,dx\right) = 162\cdot\pi \approx 508.938$$

Aufgabe 2.41 $f(x) = 3\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$

a) Diskussion
$\lim\limits_{x\to\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} = 0$
$f(x) = 0$ bei $x = 0$
Minimum bei $(-1|-3\cdot e^{-\frac{1}{2}}) \approx (-1|-1.820)$
Maximum bei $(1|3\cdot e^{-\frac{1}{2}}) \approx (1|1.820)$
Vor $x = -1$ stetig fallend, für $]-1;1[stetig$ stetig steigend, nach $x = 1$ stetig fallend

b) $A(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx$ mit $t > 0$

$$A(t) = 3\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\left(e^{\frac{t^2}{2}} - 1\right) = 3 - \frac{3}{\sqrt{e^{t^2}}}$$

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = 3$$

Aufgabe 2.42 $f(x) = a\cdot\cos x + \frac{1}{a^2}$ mit $a > 0$

a) $f_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{3\cdot\cos x}{2} + \frac{4}{9}$

(Cosinus-Funktion, $2\cdot\pi$-periodisch, in der Höhe um $\frac{3}{2}$ gezerrt, um $\frac{4}{9}$ nach oben verschoben).

$\lim\limits_{a\to 0}$: $f_0(x) = \infty$, da $f_0(x) = \underbrace{0\cdot\cos x}_{0} + \underbrace{\frac{1}{0}}_{\infty}$
$\lim\limits_{a\to\infty}$: $f_\infty(x) = \underbrace{\infty\cdot\cos x}_{-\infty\leq(\cos x\cdot\infty)\leq\infty} + \underbrace{\frac{1}{\infty^2}}_{0}.$
Für $\cos x < 0$ ist $f_\infty(x) = -\infty$, für $\cos x = 0$ undefiniert und für $\cos x > 0$ ist $f_\infty(x) = \infty$.

b)
$$V = \pi\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi\int_0^{2\pi} a^2\cos^2 x + \frac{2\cos x}{a} + \frac{1}{a^2}\,dx = \frac{\pi^2(a^6+2)}{a^4}$$

c) $V(a)$ minimal
$$V'(a) = 0 \;\rightarrow\; a = 2^{1/3}$$

(Die zweite Ableitung ist positiv.)

3 Repetition Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Lösungen dieses Kapitels richten sich im Allgemeinen nach Vorlagen von Ellen Locher und Judith Bieri, 4cN.

3.1 Kombinatorik, einstufige Zufallsversuche

Aufgabe 3.1 Mehrere Lösungen sind möglich; die Töne müssen jedoch ständig wechseln (es wird von einem Legatospiel ausgegangen):

Wenn nur zwei der drei gezogenen Töne benutzt werden: $\binom{12}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10560$

Wenn alle drei Töne gebraucht werden: $\binom{12}{3} \cdot ((3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) - (3 \cdot 2)) = 9240$

Aufgabe 3.2 $\frac{5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 1800$

≪Es bestehen 1800 Möglichkeiten, das Wort <Algebra> anzuordnen, ohne dass ein <A> an erster Stelle steht.≫

Aufgabe 3.3

a)

$$\frac{9!}{\underbrace{2}_{2<S>} \cdot \underbrace{2}_{2<A>}} = 90720$$

b) $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, die zwei <S> in vier Ecken zu setzen.

5! Möglichkeiten für andere.

$$\binom{4}{2} \cdot 5! = 720 \qquad p = \frac{720}{\frac{9!}{4}} = \frac{4 \cdot 720}{9!} = \frac{1}{126} \approx 0.007937$$

Aufgabe 3.4 17 Frauen, 12 Männer

a)

$$p = \frac{\binom{17}{0} \cdot \binom{12}{6}}{\binom{12+17}{6}} = \frac{11}{5655} \approx 0.00195$$

b)

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^{5} \left(\frac{\binom{17}{k} \cdot \binom{12}{6-k}}{\binom{29}{6}} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{\binom{17}{0} \cdot \binom{12}{6}}{\binom{29}{6}} + \frac{\binom{17}{6} \cdot \binom{12}{0}}{\binom{29}{6}} \right) \\ &\approx 0.9739 \end{aligned}$$

3.2 Mehrstufige Zufallsversuche, bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 3.5 Kugeln: 4 grüne, n rote und $n-2$ blaue. Total: $2 \cdot n + 2$ Kugeln.

a) $\left(\frac{2 \cdot n - 2}{2 \cdot n + 2}\right)^6$

b) $p(n) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{2 \cdot n + 2} \cdot \frac{n}{2 \cdot n + 1} \cdot \frac{n-2}{2 \cdot n}\right) = \frac{6 \cdot (n-2)}{(n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}$

c) $p'(n) = \frac{-6 \cdot (2 \cdot n^2 - 8 \cdot n - 7)}{(n+1)^2 \cdot (2 \cdot n + 1)^2} \;\rightarrow\; p'(n) = 0 \;\rightarrow\; n \approx 4.74$

$$p(4) \approx 0.267 \qquad p(5) \approx 0.273 \;\rightarrow\; n = 5$$

Aufgabe 3.6 A: Alarm wird ausgelöst, B: Alarm wird vom Einbrecher ausgelöst.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{da jedoch } B \subset A \text{ ist, gilt} \quad p_A(B) = \frac{p(B)}{p(A)}$$

$$p_A(B) = \frac{0.001 \cdot 0.99}{0.005 + 0.001 \cdot 0.99} \approx 0.165$$

3.3 Zufallsvariablen

Aufgabe 3.7 $p(x = 6) = p(x = 1) = \frac{1}{3}$
$p(x = 2) = p(x = 3) = p(x = 4) = p(x = 5) = \frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{12}$

a) Die Wahrscheinlichkeit, zwei gefälschte Würfel zu ziehen beträgt: $p(gg) = \frac{1}{3}$; jene, einen gefälschten und einen «richtigen» Würfel zu ziehen $p(gr) = \frac{2}{3}$.

Bei zwei gefälschten Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit, nur Sechsen und Einsen zu würfeln, $p_{gg}(6, 1) = \frac{4}{9}$. Bei einem gefälschten und einem «richtigen» Würfel beträgt sie $p_{gr}(6, 1) = \frac{4}{18}$.

Ich gewinne das Spiel dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von $p(F) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{18} \approx 0.29$.

Mein durchschnittlicher Gewinn pro Spiel beträgt $\mu_F \approx 0.29 \cdot 3$ Fr. ≈ 0.87 Fr.; Regulas Aussichten stehen mit $\mu_R \approx 0.71 \cdot 1$ Fr. ≈ 0.71 Fr. schlechter.

Ergo ist das Spiel für mich günstig.

b) **(*)** Ohne gefälschte Würfel betrüge meine Gewinnchance $p(F) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Damit läge mein durchschnittlicher Gewinn bei $\mu_F = \frac{1}{9} \cdot 3$ Fr. ≈ 0.33 Fr., jener von Regula bei $\mu_R = \frac{8}{9} \cdot 1$ Fr. ≈ 0.89 Fr..

Ergo errechnet sich Regula (falls sie rechnet) eine bessere Aussicht auf Gewinn als sie diese von mir zu erwarten hat.

3.4 Binomialverteilung, Normalverteilung

Aufgabe 3.8 $p(kath) = \frac{324}{879} \approx 0.37 \qquad p \approx 0.63$

a) $P(X = 7) \approx \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot 0.37^7 \cdot 0.63^7 \approx 0.18$

b) $P(X \leq 29) \approx \sum_{k=0}^{29} \begin{pmatrix} 100 \\ k \end{pmatrix} \cdot 0.37^k \cdot 0.63^{(100-k)} \approx 0.061$

c) $n \approx 295 \qquad p \approx 0.37 \qquad \mu = n \cdot p \approx 108.86$
95%-Umgebung: $\sigma \cdot 1.96 \approx \sqrt{295 \cdot 0.37 \cdot 0.63} \cdot 1.96 \approx 16.25$

$108.85 - 16.25 = 92.5 \rightarrow 92 \qquad 108.85 + 16.25 = 125.1 \rightarrow 126$

≪Zwischen 92 und 126 Schüler (und davon vielleicht gar einige Schülerinnen) dürften katholisch sein.≫

Aufgabe 3.9 $p(Fehler) = 0.1$; 40 Stück mit 95% Wahrscheinlichkeit kein Fehler.

$$\sum_{k=40}^{x} \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} \cdot 0.9^k \cdot 0.1^{x-k} \geq 0.95 \rightarrow x = 48 \quad (\text{mit } p(gut) \approx 0.954)$$

3.5 Testen von Hypothesen (*)

Aufgabe 3.10 60% gegen Unterführung $\rightarrow$ Lichtsignal.

a) **(*)** 15 von 20 Gefragten sind gegen die Unterführung. Sind mindestens $0.6 \cdot 20 = 12$ Personen gegen die Unterführung, wird für die Lichtanlage entschieden. Dies entspricht dem Ausgang der Umfrage.

Solange die Stadt oder das Dorf weniger als 25 ($= \frac{15}{0.6}$)Personen beheimatet, ist das Resultat der Umfrage mit Sicherheit richtig. Sollte die Bevölkerung grösser sein (mindestens Faktor 40 kann angenommen werden), so ist der Umfang der Stichprobe sehr gering. Zu gering, um Aussagekräftig zu sein.

Die Wahrscheinlichkeit α, dass bei einer Umfrage unter 20 Personen, die von der Zustimmung von 60% ausgeht, 15 oder mehr Personen dafür sind, ist

$$\alpha = \sum_{k=15}^{20} \begin{pmatrix} 20 \\ k \end{pmatrix} \cdot 0.6^k \cdot 0.4^{20-k} \approx 0.126$$

b) Von hundert Personen sollten – sicherheitshalber – 72 (oder mehr) gegen die Unterführung sein.

Die Wahrscheinlichkeit α, dass diese Zustimmung erreicht wird, ist

$$\alpha = \sum_{k=72}^{100} \begin{pmatrix} 100 \\ k \end{pmatrix} \cdot 0.6^k \cdot 0.4^{100-k} \approx 0.008$$

Aufgabe 3.11 (*) $p(OR) = \frac{39}{45} \approx 0.86 \qquad p(Gym) = \frac{59}{80} \approx 0.74 \qquad p(OR + Gym) = \frac{98}{125} \approx 0.78$ Ausgegangen werden soll von der Hypothese, dass Schüler des Gymnasiums mit den OR-Schülern gleichauf gehen:

$$p_i(Gym) = p_i(OR) = \frac{98}{125}$$

Wahrscheinlichkeit α, dass von 45 OR-Schülern 6 versagen:

$$\alpha = \sum_{k=40}^{45} \begin{pmatrix} 45 \\ k \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{98}{125}\right)^k \cdot \left(\frac{27}{125}\right)^{45-k} \approx 0.056$$

Wahrscheinlichkeit β, dass von 80 Gymnasiasten 20 versagen:

$$\beta = \sum_{k=60}^{80} \begin{pmatrix} 80 \\ k \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{98}{125}\right)^k \cdot \left(\frac{27}{125}\right)^{80-k} \approx 0.811$$

Je nach Entscheidungskriterien sind OR-Schüler leicht besser vorbereitet.

4 Maturaaufgaben

4.1 Maturaaufgaben zur Vektorgeometrie

Aufgabe 4.1 $M(1|1|0)$, $A(5|2|-8)$, $B(8|5|4)$.
Ebenengleichung:

$$\vec{n} = \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 36 \\ -72 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} \cdot M = -36$$

$$\mathbb{E}: \quad 36 \cdot x - 72 \cdot y + 9 \cdot z = -36$$

Neigungswinkel α:

$$\bar{\alpha} = \angle \left(\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \arctan\left(\frac{1}{9}\right) \approx 83.62^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \bar{\alpha} \approx 6.38^\circ$$

a) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| \quad$ und $\quad \angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 90^\circ$:

$$(5-1)^2 + (2-1)^2 + (-8)^2 = (8-1)^2 + (5-1)^2 + 4^2 = 4^2 + 1^2 + 8^2 = 7^2 + 4^2 + 4^2 = 81$$

$$\cos(90^\circ) = 1 \;\rightarrow\; \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} = \frac{81}{9 \cdot 9} = 1$$

b) Quadrat $ABCD$, Mittelpunkt M:

$$C = M + (\overrightarrow{MA}) = (-3|0|8) \qquad D = M + (\overrightarrow{MB}) = (-6|-3|-4)$$

c) $\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF} \perp \mathbb{E}$ mit $|\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MF}| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2 \cdot a^2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \qquad (a = \overrightarrow{AB})$

$$|\overrightarrow{ME}| \cdot f = \frac{\sqrt{2} \cdot |\overrightarrow{AB}}{2} \;\rightarrow\; f = \frac{1}{9}$$

$$E = M + \left(\frac{1}{9} \cdot (\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB})\right) = (5|-7|1) \qquad F = (-3|9|-1)$$

Aufgabe 4.2 $A(9|-4|-8)$, $B(-3|8|-2)$, $g : \vec{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{m}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{n}}$

a)

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|} = 135°$$

b) C: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ und $C \in g$

$$g = \begin{pmatrix} 7+t \\ 8 \\ -t \end{pmatrix} \qquad g - A = \begin{pmatrix} -2+t \\ 12 \\ 8-t \end{pmatrix} \qquad g - B = \begin{pmatrix} 10+t \\ 0 \\ 2-t \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\; (-2+t) \cdot (10+t) + (8-t) \cdot (2-t) = 0 \;\rightarrow\; t_0 = -1 \quad t_1 = 2$$

$$\rightarrow\; C_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) $g \in \mathbb{E}$ und $g \| \overrightarrow{AB}$ $\rightarrow$ ein Richtungsvektor der Ebene muss dem Richtugnsvektoren $\overrightarrow{AB}$ der Gerade entsprechen.

$$\mathbb{E} : \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix} = \vec{l} \qquad \vec{l} \cdot A = 12$$

$$\rightarrow\; \mathbb{E} : \; -12 \cdot x - 6 \cdot y - 12 \cdot z = 12$$

Aufgabe 4.3 $A(0|0|0), B(12|0|0), C(12|12|0), D(0|12|0), E(0|0|12), F(12|0|12), G(12|12|12), H(0|12|12)$
$\triangle(P(0|8|12), Q(6|0|12), A)$

a) $V = V_W - V_P$ (W: Würfel, P: Pyramide (kleineres Teilstück), das Δ aus dem Würfel schneidet).

$$V_P = \frac{G \cdot h}{3} \qquad G = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}| = 12 \cdot \sqrt{29}$$

$$h: \quad E + s \cdot (\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}) \cap \Delta = H; \qquad \vec{h} = \overrightarrow{EP}$$

$$\vec{h} = \frac{1}{29} \cdot (\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}) = \begin{pmatrix} \frac{96}{29} \\ \frac{72}{29} \\ \frac{-48}{29} \end{pmatrix} \qquad h = |\vec{h}| = \frac{24 \cdot \sqrt{29}}{29}$$

$$V_P = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{\frac{24 \cdot \sqrt{29}}{29} \cdot 12 \cdot \sqrt{29}}{3} = 192$$

$$V = V_W - V_P = 12^3 - 192 = 1536$$

b)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{GQ}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{GQ}|}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx 63.435°$$

c)

$$\vec{n} \perp \Delta = \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 96 \\ 72 \\ -48 \end{pmatrix} \rightarrow l : \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ 72 \\ -48 \end{pmatrix}$$

$$l \cap \Delta : \qquad \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ 72 \\ -48 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow r = -\frac{7}{58}$$

$$L = C - \frac{7}{58} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{12}{29} \\ \frac{96}{29} \\ \frac{168}{29} \end{pmatrix}$$

d)

$$G + r \cdot \vec{n} = s \cdot \overrightarrow{AP} + t \cdot \overrightarrow{AQ} \rightarrow r = -\frac{5}{58} \rightarrow \vec{\delta} = r \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{240}{29} \\ -\frac{180}{29} \\ \frac{120}{29} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{\delta}| = \frac{60 \cdot \sqrt{29}}{29} \approx 11.142$$

4.2 Maturaaufgaben zu Folgen und Reihen

Aufgabe 4.4 Geometrische Folge a_n mit $a_0 = 10$ und $a_1 = 8$; $\alpha = 120°$.

a)

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_0}{1 - q} = \frac{10}{1 - \frac{4}{5}} = 50$$

b)

$$a_n = a_0 \cdot q^n \qquad 10 \cdot \frac{4}{5}^n < 0.1 \;\rightarrow\; n = 21$$

c) Die x-Koordinate eines Punktes P_n entspricht $x_{P_{n-1}} + \cos\beta \cdot l_n$ wobei β der Winkel zwischen der x-Achse und der Geraden $P_{n-1}P_n$ und l_n die Strecke $\overline{P_{n-1}P_n}$ ist:

$$x_{P_0} = 0 \quad x_{P_1} = 10 \quad x_{P_2} = 14 \quad x_{P_3} = 10.8$$

$$x_{P_4} = 5.68 \quad x_{P_5} = 3.632 \quad x_{P_6} = 5.2704 \quad x_{P_7} = 7.89184$$

Aufgabe 4.5

a) Geometrische Folge a_n mit $a_1 = 0.2$; $q = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \frac{1}{15}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\rightarrow\; q_0 = \frac{\sqrt{49 - 225 \cdot a_1} + 8}{15} \qquad \text{oder} \qquad q_1 = \frac{-\sqrt{49 - 225 \cdot a_1} - 8}{15}$$

$$\rightarrow\; q_0 = \frac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad q_1 = 0.4$$

b)

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{3 \cdot n}^{\infty}}{\underbrace{3 \cdot n + 2}_{\infty}} \;\rightarrow\; g = 1$$

$$b_{n_g} \geq 0.999 \;\rightarrow\; n_g = 666 \;\rightarrow\; n = n_g - 1 = 665$$

c) Arithmetische Folge $305 + 289 + \cdots + x = 39$

$$d = a_n - a_{n-1} = -16 \;\rightarrow\; s_n = a_0 \cdot (n+1) + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot d$$

$$39 = 305 \cdot (n_x + 1) + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} \cdot -16 \;\rightarrow\; n_x = 38 \;\rightarrow\; x = a_{n_x} = -303$$

Aufgabe 4.6 80 mg Z pro Tablette. Halbwertszeit von Z: 7 Tage.

a) 800 g an Tag 0.

$$m(t) = m_0 \cdot p^t \;\rightarrow\; t = \frac{2^{\frac{6}{7}}}{2} \approx 0.906$$

$$m(10) = 800 \cdot p^{10} = \frac{25 \cdot 2^{\frac{6}{7}}}{32} \text{ g} \approx 297.2 \text{ g}$$

b) 1.

$$\sum_{t=0}^{9} 80 \cdot p^t \approx 533.327 \text{ g}$$

2.

$$\sum_{t=0}^{n} 80 \cdot p^t \geq 600 \text{ g} \rightarrow n = 12$$

≪Nach der dreizehnte Tablette wird die optimale Dosis von 600 Gramm erstmals überschritten.≫

c)

$$\sum_{t=0}^{n_\dagger} 160 \cdot p^t \geq 1000 \text{ g} \rightarrow n_\dagger = 8$$

≪Der Patient gerät nach der neunten Einnahme in ernsthafte Schwierigkeiten.≫

d)

$$\sum_{t=0}^{n} 80 \cdot p^t \geq 1000 \text{ g} \rightarrow n = 12$$

≪Nein.≫

4.3 Maturaaufgaben zu Differential- und Integralrechnung

Aufgabe 4.7 $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 4 \cdot x$. Siehe dazu Abbildung 4 auf Seite 33

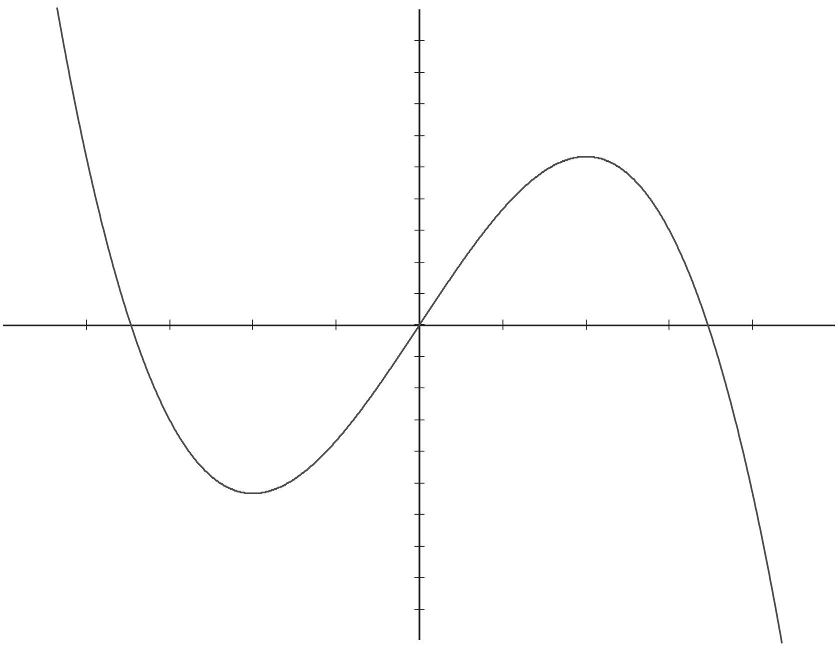

Abbildung 4: Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 4 \cdot x$

a) Nullstellen: $x_0 = 2 \cdot \sqrt{3}$, $x_1 = -2 \cdot \sqrt{3}$ und $x_2 = 0$.
Extrema: $x_0 = 2$ und $x_1 = -2$.
Wendepunkt: $x = 0$.

b) $g(x) = n \cdot x$

$$G = \int_0^S f(x)\,dx - \int_0^S g(x)\,dx \qquad S:\ f(x) = g(x)\ \rightarrow\ S = \sqrt{-3 \cdot (n-4)}$$

$$G(n) = \frac{3 \cdot (n-4)^2}{4} \qquad G(n_g) = \frac{25}{3}\ \rightarrow\ n_g = \frac{2}{3}$$

c) $f_k(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + k \cdot x$ mit $k \in \mathbb{R}$.

$$f_k'(x) = k - x^2 \qquad x = 3\ \rightarrow\ k = 9$$

d) $h(x) = \frac{8}{5} \cdot x$

$$f'(x_n) = 0 \quad \text{und} \quad f(x_n) = \frac{8}{5} \cdot x\ \rightarrow\ k_0 = \frac{12}{5} \text{ oder } k_1 = 0$$

e) Wendepunkt: $W(0|0)$

$$f'(0) = k \qquad k = \tan 60° = \sqrt{3}$$

Aufgabe 4.8 $f(x) = \frac{x \cdot (x-5)}{(x-2)^4}$; siehe dazu Abbildung 5 auf Seite 34

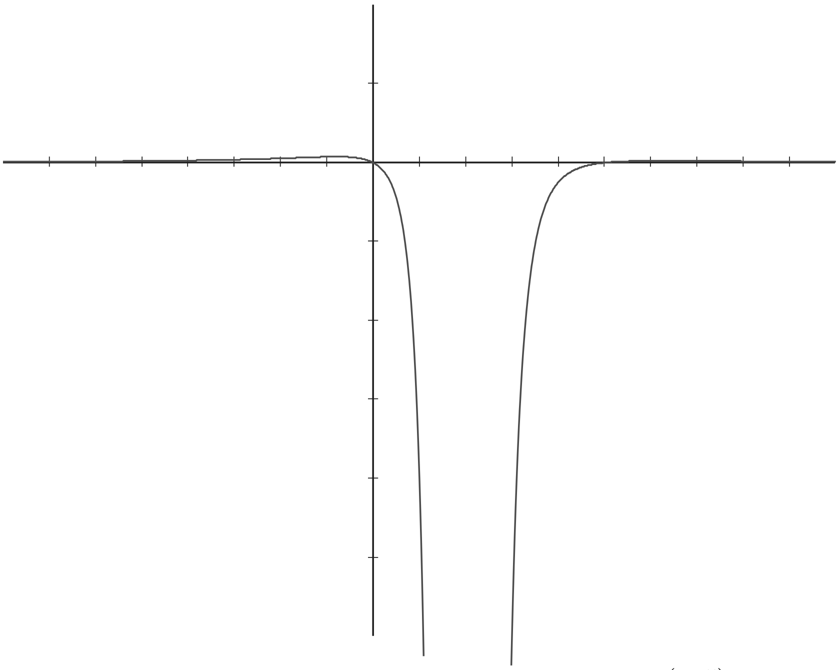

Abbildung 5: Graph der Funktion $f(x) = \frac{x \cdot (x-5)}{(x-2)^4}$

a) Nullstellen: $x_0 = 5$ und $x_1 = 0$.
Extrema: $x_{e_0} = \frac{\sqrt{201}+11}{4}$ und $x_{e_1} = \frac{-(\sqrt{201}-11)}{4}$.
Polstelle: $x = 2$; Negativer Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Asymptote: $y = 0$.
$x < x_{e_1}$: stetig steigend
$x_{e_1} < x < 2$: stetig fallend
$2 < x < x_{e_0}$: stetig steigend
$x > x_{e_0}$: stetig fallend

b)

$$A_{5<x<\infty} = \int_5^\infty f(x)\,dx = \frac{11}{54}$$

Aufgabe 4.9 $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

a) $f(0) = -6 \;\rightarrow\; d = -6$

$$f(3) = 0 \quad f'(3) = 5 \quad f''(3) = 0 \;\rightarrow\; f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 6$$

b) Finden von Nullstellen nach I. Newton:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Eine Zeichnung erleichtert das Verständnis und ermöglicht problemlos die Herleitung.

0. Schritt: $x_0 = 7$
1. Schritt: $x_1 = \frac{227}{33}$
2. Schritt: $x_2 = \frac{7443187}{1082961}$

$x_n = 6.872983$

Aufgabe 4.10 Für die Kurve k (mit Radius r) gilt: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Die Gerade g ist $y = -x + r$. Die Strecke $\overline{EF}$ ist $y_k - y_g$:

$$\overline{EF}(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - (-x + r) \qquad \overline{EF}'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\overline{EF}'(x_0) = 0 \;\rightarrow\; x_0 = \frac{\sqrt{2} \cdot r}{2}$$

Aufgabe 4.11 $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $f(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'(0) \perp -\frac{1}{2} \cdot x \;\rightarrow$ $f'(0) = 2$ und $f(6) = 0$

a)

$$f(x) = -\frac{1}{18} \cdot x^3 + 2 \cdot x$$

b)

$$A = \int_0^6 f(x)\,dx = x^2 - \frac{x^4}{72}\Big|_0^6 = 18$$

$$\frac{A}{2} = \int_0^{x_g} f(x)\,dx \;\rightarrow\; x_g = 3 \cdot \sqrt{-2 \cdot (\sqrt{2} - 2)}$$

$$g(y) = 3 \cdot \sqrt{-2 \cdot (\sqrt{2} - 2)} \cdot y \approx 3.247 \cdot$$

Aufgabe 4.12 $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (x+4) \cdot \sqrt{1-x^2}$

a) $f(x) = 0 \rightarrow x_0 = -1$ und $x_1 = 1$

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx = \frac{4 \cdot \pi}{15}$$

b)

$$A = r^2 \cdot \pi = q \cdot \pi \rightarrow q(x) = (f(x))^2 \rightarrow q'(x_g) = 0 \rightarrow x_g = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

Aufgabe 4.13 Kreissektor mit Radius r, Bogenlänge b und Zentriwinkel α. Kegel mit Höhe h und Radius R.

a) $b = r \cdot \alpha$ (α im Gradmasse) oder $b = r \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$ (α im Bogenmasse)

$$b = 3 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 70 = \frac{7 \cdot \pi}{6} \rightarrow R = \frac{b}{2 \cdot \pi} = \frac{7}{12}$$

$$h = \sqrt{r^2 - R^2} = \frac{\sqrt{1247}}{12} \qquad V = \frac{\pi}{3} \cdot R^2 \cdot h = \frac{49 \cdot \pi \cdot \sqrt{1247}}{5184} \approx 1.049$$

b)

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{3 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha}{2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot \sqrt{3^2 - \left(\frac{3 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \alpha}{2 \cdot \pi} \right)^2} = \frac{\pi \cdot \alpha^2 \cdot \sqrt{129600 - \alpha^2}}{5184000}$$

$$V'(\alpha_m) = 0 \rightarrow \alpha_m = 120 \cdot \sqrt{6} \approx 293.938^\circ$$

Aufgabe 4.14 $f(x) = \frac{5 \cdot \ln x}{x}$ (Siehe Abbildung 6 auf Seite 37.

a) Die Funktion ist definiert für $x > 0$.
Ihr Schnittpunkt mit der x-Achse liegt bei $x_S = 1$ ($f(x_S) = 0$.
Ihr Maximum liegt bei $x_M = e$ und beträgt $\frac{5}{e}$ ($f'(x_M) = 0$).
Ihr Wendepunkt liegt bei $x_W = e^{\frac{3}{2}}$ ($f''(x_W) = 0$).
Für $x < e$ ist die Funktion stetig steigend, für $x > e$ stetig fallend.
Für $x = 0$ weist sie einen negativen Pol auf ($\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$).
Die Funktion weist eine (für die positive x-Achse gültige) Asymptote von $y = 0$ auf ($\lim\limits_{x \to \infty} = 0$).

b)

$$A = \int_{x_S}^{x_W} f(x) \, dx = \int_{1}^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{5 \cdot \ln x}{x} \, dx = \frac{45}{8}$$

Aufgabe 4.15 $f(x) = y = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot x$. Siehe dazu Abbildung 7 auf Seite 37.

a) $f(x) = -f(-x)$. Die Funktion ist zu der Geraden $x = y$ symmetrisch.

Schnittpunkte mit der x-Achse: $x_0 = 3$, $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$.
Hochpunkt bei $x_h = \sqrt{3}$, Tiefpunkt bei $x_t = -\sqrt{3}$.

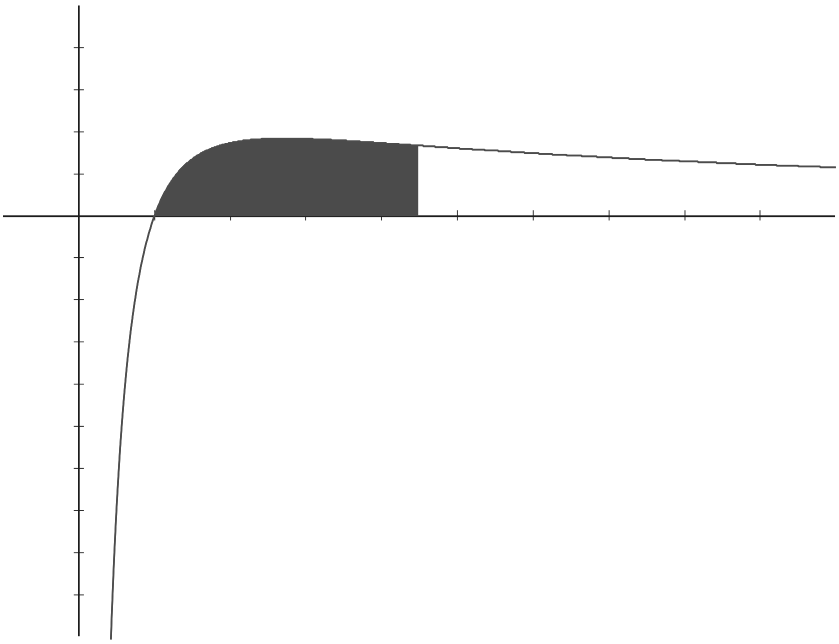

Abbildung 6: Graph der Funktion $f(x) = \frac{5 \cdot \ln x}{x}$

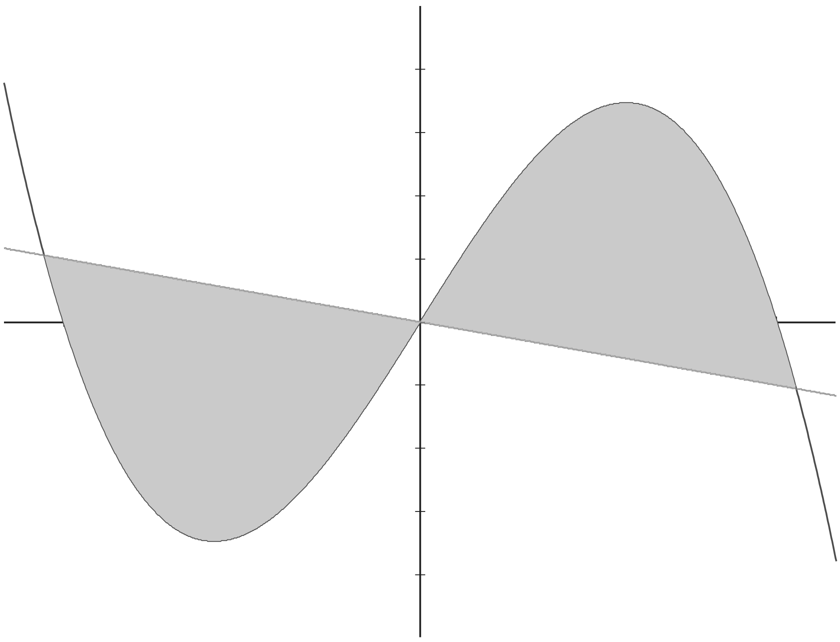

Abbildung 7: Graph der Funktionen $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot x$ und $g(x) = -\frac{1}{3} \cdot x$

b) $f'(x) = 3 - x^2 \;\rightarrow\; f'(0) = 3 \;\rightarrow\; g(x) \perp f(x)$ in $P(0|0) = -\frac{1}{3} \cdot x$

c)

$$n \cap k: \quad f(x) = g(x) \;\rightarrow\; x_0 = -\sqrt{10} \text{ und } x_1 = \sqrt{10}$$

$$A = 2 \cdot \int\limits_0^{\sqrt{10}} f(x)\,dx - \int\limits_0^{\sqrt{10}} g(x)\,dx = 2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{20}{3}\right) = \frac{50}{3}$$

d) Tiefpunkt: $H_0(-\sqrt{3}| - (2 \cdot \sqrt{3}))$, Hochpunkt: $H_1(\sqrt{3}|2 \cdot \sqrt{3})$
Schnittpunkte: $S_0\left(-\sqrt{10}|\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ und $S_1\left(-\sqrt{10}|\frac{-\sqrt{10}}{3}\right)$.

$$A_{\triangle} = a \cdot h_a \qquad a = \sqrt{{x_{S_1}}^2 + {y_{S_1}}^2} = \frac{10}{3}$$

$$h_a: \quad g: \vec{r} = H_1 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g \cap n = T_1 \qquad \overline{T_1H_1} = h_a$$

$$T_1 = (\sqrt{3}|2 \cdot \sqrt{3}) + \frac{-7 \cdot \sqrt{3}}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{10}\Big|\frac{-\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$\rightarrow\; h_a = \sqrt{(x_{H_1} - x_{T_1})^2 + (y_{H_1} - y_{T_1})^2} = \frac{7 \cdot \sqrt{30}}{10}$$

$$\rightarrow\; A = 2 \cdot A_{\triangle} = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{7 \cdot \sqrt{30}}{10} = \frac{14 \cdot \sqrt{30}}{3} \approx 25.56$$

Anderer Lösungsansatz:

$$A = 2 \cdot \left(\int\limits_0^{x_{H_1}} \frac{y_{H_1}}{x_{H_1}} \cdot x\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_{H_1}}^{x_{S_1}} \left(y_{H_1} - x_{H_1} \cdot \frac{y_{S_1} - y_{H_1}}{x_{S_1} - x_{H_1}}\right) + \frac{y_{S_1} - y_{H_1}}{x_{S_1} - x_{H_1}} \cdot x\,dx + \int\limits_0^{x_{S_1}} \frac{1}{3} \cdot x\,dx \right)$$

Aufgabe 4.16 $\Delta x = 300$ m und $\Delta y = 100$ m.

a) Siehe dazu auch Abbildung 8 auf Seite 39.

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f(-300) = f(300) = 0 \quad f(0) = -100 \quad f'(0) = 0 \;\rightarrow\; f(x) = \frac{1}{900} \cdot x^2 - 100$$

b)

$$f'(-300) = -\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \tan\alpha = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \alpha \approx 33.69$$

c)

$$V = \pi \cdot \int\limits_{-300}^{300} f(x)^2\,dx = 3200000 \cdot \pi \text{ m}^3 \approx 10'000'000 \text{ m}^3$$

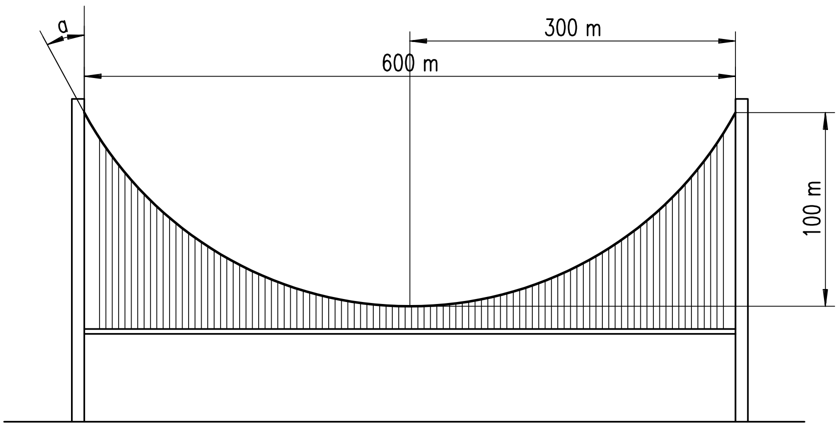

Abbildung 8: Modell einer Hängebrücke mit einer Parabel als Spannseil

Aufgabe 4.17 $f(t) = \int\limits_1^e x^t \cdot \ln x \, dx$

a) Partielle Integration: $\int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$

$n = t + 1$ (def.)

$$f(t) = \int_1^e \underbrace{x^{n-1}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} \, dx$$

$$u'(x) = x^{n-1} \;\rightarrow\; u(x) = \frac{x^n}{n} \qquad v(x) = \ln x \;\rightarrow\; v'(x) =$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \ln x \cdot \frac{x^n}{n}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^n}{n} \, dx \\
&= \frac{e^n}{n} - \underbrace{\int_1^e \frac{x^{n-1}}{n} \, dx}_{\frac{x^n}{n^2}} \\
&= \frac{e^2}{n^2} - \left(\frac{e^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ mit } n = t + 1 \\
&= \frac{t \cdot e^{t+1}}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2}
\end{aligned}$$

Für $t = 1$ gilt:

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} \;\rightarrow\; \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2}$$

b) Siehe dazu Abbildung 9 auf Seite 40

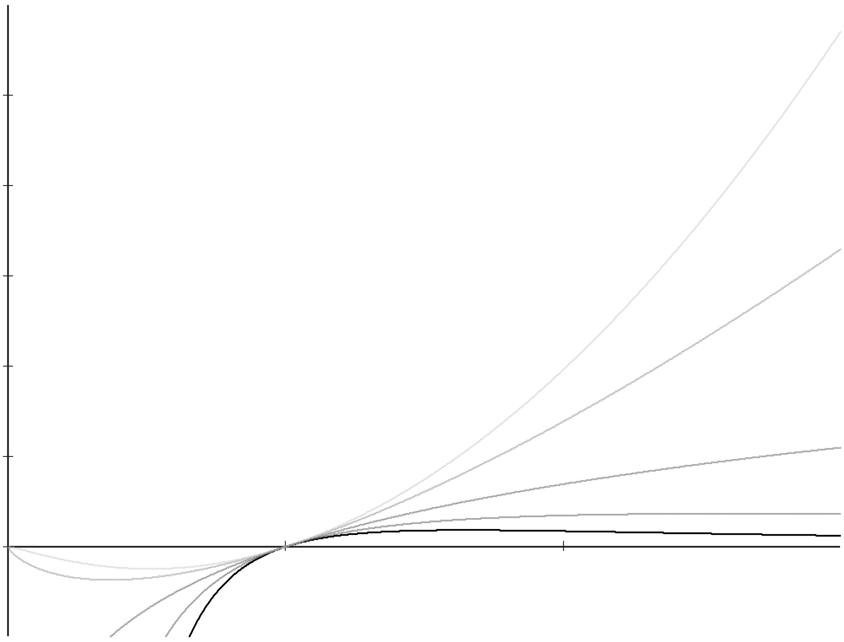

Abbildung 9: Graph der Funktion $f(t) = \int_1^e x^t \cdot \ln x \, dx$ mit $t = -2, -1, 0, 1$ und 1.5.

4.4 Maturaaufgaben zur Stochastik

Aufgabe 4.18 Scrabble; 117 Täfelchen; sieben werden gezogen.

a)

$$p(E) = \frac{16}{117}$$

Genau zwei ≪E≫:

$$P(X = 2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{16}{117}\right)^2 \cdot \left(\frac{101}{117}\right)^5 \approx 0.188$$

Mehr als ein ≪E≫:

$$P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{7} \begin{pmatrix} 7 \\ k \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{16}{117}\right)^k \cdot \left(\frac{101}{117}\right)^{7-k} \approx 0.247$$

b) Alle Buchstaben für ≪Beenden≫:

$$\begin{aligned} p &= P_E(X = 3) \cdot P_B(X = 1) \cdot P_N(X = 2) \cdot P_D(X = 1) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{16}{117}\right)^3 \cdot \left(\frac{101}{117}\right)^4\right) \cdot \left(7 \cdot \left(\frac{2}{117}\right) \cdot \left(\frac{115}{117}\right)^6\right) \\ &\quad \cdot \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{10}{117}\right)^2 \cdot \left(\frac{107}{117}\right)^5\right) \cdot \left(7 \cdot \left(\frac{6}{117}\right) \cdot \left(\frac{111}{117}\right)^6\right) \\ &\approx 0.5 \cdot 0.108 \cdot 0.099 \cdot 0.262 \\ &\approx 0.00014 \quad (\approx 0.014\%) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.19 $p(Am) = 0.4$; $p(Am, TS) = 0.125$; $p(nAm, TS) = 0.0125$.
$p(Am + TS) = 0.4 \cdot \frac{1}{8} = 0.05$ und $p(nAm + TS) = 0.6 \cdot \frac{1}{80} = 0.0075$.
Da uns nur Tomatensafttrinker interessieren, ist $p(Am + TS) + p(nAm + TS) = 1 \rightarrow$ beide werden mit Faktor 17.391 $\left(\approx \frac{1}{0.05+0.0075}\right)$ multipliziert:
$p(Am) \approx 0.87$ sowie $p(nAm) \approx 0.13$

Aufgabe 4.20 Bananenbündel à 5 Stück. $p(faul) = 0.15$.

a)
$$P(X = 5) = 0.85^5 \approx 0.444$$

b)
$$\binom{5}{2} \cdot 0.15^2 \cdot 0.85^3 \approx 0.138$$

c)
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot 0.444^k \cdot 0.556^{n-k} \geq 0.999 \ \rightarrow \ n = 12 \quad \text{mit } p \approx 0.9991$$

d) 1000 Bündel à Fr. 1.20; Verkauf zu Fr. 2.50.
$$p(X > 1) = \sum_{k=2}^{5} \binom{5}{k} \cdot 0.15^k \cdot 0.85^{5-k} \approx 0.168$$
$$\mu = ((2.50 - 1.20) - P(X > 1) \cdot 2.50) \text{ Fr.} \approx 0.889 \text{ Fr.}$$

Aufgabe 4.21

a)
- $p(zz)$ 1. Wurf: $\frac{1}{4}$
- $p(zz)$ 2. Wurf: $0.25 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.3125$
- $p(zz)$ 3 oder mehr Würfe: $0.25 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.4375$

$$\mu = 0.25 \cdot 1 \text{ Fr.} + 0.3125 \cdot 6 \text{ Fr.} + 0.4375 \cdot (-2 \text{ Fr.}) = 1.25 \text{ Fr.}$$
$$\sigma = \sqrt{\sum_k (a_k - \mu)^2 \cdot P(X = a_k)} \approx 3.437$$

b)
$$\begin{aligned} g(p) &= p^2 + (p^2 \cdot q^2) \cdot 6 + (2 \cdot q \cdot p^2) \cdot 6 + (2 \cdot p \cdot q^2) \cdot -2 \\ &\quad +(q^2 \cdot q^2) \cdot -2 + (q^2 \cdot 2 \cdot p \cdot q) \cdot -2 \\ &= 8 \cdot p^4 - 32 \cdot p^3 + 27 \cdot p^2 - 2 \end{aligned}$$
$$g'(p) = 32 \cdot p^3 - 96 \cdot p^2 + 54 \cdot p \ \rightarrow \ g'(p) = 0$$
$$\rightarrow \ p = \frac{3}{4} \quad \left[p_1 = \frac{9}{4}\right] \quad [p_2 = 0]$$

Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung.
Leonardo da Vinci