Repetitionsaufgaben für die Matur

Torsten Linnemann, Kantonsschule Solothurn

16. Juli 2005

Einen Grossteil der Aufgaben verdanke ich Bernhard Ruh, Kantonsschule Solothurn.

Mit (*) gekennzeichnete Aufgaben gehören nur zum Stoffumfang im naturwissenschaftlichen Profil.

Inhaltsverzeichnis

1 Repetition Geometrie, Analytische Geometrie, Matrizen

1.1 Geraden in der Ebene

Aufgabe 1.1 Bestimme die Gerade durch

a) $(4|3)$ und $(6|7)$ b) $(1|-4)$ und $(-2|-5)$

Aufgabe 1.2 Bestimme die Gerade mit Steigung $4/3$ durch $(3|-4)$

Aufgabe 1.3 Bestimme die Gerade mit Steigung -4 durch $(0|3)$

Aufgabe 1.4 Bestimme die Gerade, die die x-Achse bei 4 und die y-Achse bei -2 schneidet.

Aufgabe 1.5 Bestimme die Gerade, die die x-Achse bei 2 schneidet und Steigung -2 hat.

Aufgabe 1.6 Bestimme die Gerade mit Steigung -2, die die Funktion $f(x) = x^2 + 4x - 4$ an der Stelle 3 schneidet.

Aufgabe 1.7 Bestimme die Gerade, die die Tangente an die Funktion an der Stelle 4 ist.

a) $f(x) = x^3 + 7x + 9$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

Aufgabe 1.8 Bestimme die Gerade, die die Funktion an der Stelle 1 senkrecht schneidet.

a) $f(x) = 1/4x^4 + 2/3x^3 + 1/2x^2$ b) $f(x) = x^2 - 2x + 9$

Aufgabe 1.9 Gegeben ist die Gerade

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Funktion $f : x \mapsto x^3 + x^2 + ax + b$. Wie müssen die Parameter a und b gewählt werden, damit die Gerade die Tangente an die Funktion an der Stelle 2 ist?

Aufgabe 1.10 Eine Fläche ist begrenzt durch die Funktion $f : x \mapsto x^2 - 2x - 1$ und die Gerade durch $(0|2)$ und $(4|5)$. Berechne den Flächeninhalt.

Aufgabe 1.11 Eine Fläche ist begrenzt durch die Koordinatenachsen und die Gerade, die die x-Achse bei 5 und die y-Achse bei 8 schneidet. Diese Fläche rotiert um die y-Achse. Berechne das Rotationsvolumen.

1.2 Stereometrie (*)

Aufgabe 1.12 **(*)** Einer Kugel vom Radius 1 soll ein gerader Kreiskegel einbeschrieben werden, dessen Volumen einen Viertel des Kugelvolumens beträgt. Berechne die Höhe dieses Kegels.

1.3 Vektorrechnung

Aufgabe 1.13 Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Die Komponenten a und b werden mit einem Laplace-Würfel bestimmt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufeinander senkrecht stehen?

Aufgabe 1.14 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme x so, dass der Inhalt der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gleich $\sqrt{173}$ ist.

Aufgabe 1.15 Bestimme x so, dass die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ koplanar sind.

1.4 Gerade in der xy-Ebene

Aufgabe 1.16 Die Punkte $A(14/14), B(0/0), C(16/0)$ bestimmen ein Dreieck.

a) Bestimme die Länge der Höhe h_a.

b) Bestimme den Höhefusspunkt der Höhe h_a.

1.5 Gerade und Ebene im Raum

Aufgabe 1.17 1.6.1 **(*)** Gegeben ist die Ebene $E : P(1/1/2)Q(-3/6/4)R(0/-3/6)$. Bestimme die Koordinatengleichung, den Abstand vom Ursprung inklusive Fusspunkt und die Schnittpunkte mit den Achsen.

Aufgabe 1.18 Von einem Quadrat $ABCD$ kennt man den Mittelpunkt $M(3/2/-1)$. Die Ecke A liegt auf der zur Quadratebene senkrechten Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Bestimme die Koordinaten der Quadratecken.

b) **(*)** Bestimme das Volumen einer geraden vierseitigen Pyramide $ABCDS$, die aus lauter gleichen Kanten besteht.

Aufgabe 1.19 **(*)** Gegeben ist die Gerade $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ und die Punkte $A(1/-2/3)$,$B(-4/12/1)$, $C(9/-4/19)$. Die Punkte A und B legen die Gerade h fest, die Punkte A und C die Gerade i.
Gesucht: Alle Punkte auf g mit gleichem Abstand von h und i.

2 Repetition Algebra und Analysis

2.1 Komplexe Zahlen (*)

Aufgabe 2.1 (*) Berechne $(z + \bar{z} + iz\bar{z})^7$ für $z = -1 + 2i$ und stelle das Resultat in der Form $u + vi$ dar.

Aufgabe 2.2 (*) Für welche z ist $w = \frac{z-1}{z-i}$ reell?

Aufgabe 2.3 (*) Gib sämtliche Lösungen der Gleichung $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

Aufgabe 2.4 (*) Löse die quadratische Gleichung $z^2 - 2(1 + i\sqrt{3})z + 8(-1 + i\sqrt{3}) = 0$.

2.2 Gleichung n-ten Grades (*)

Aufgabe 2.5 (*) Finde alle Lösungen der Gleichung $x^4 - 8x^3 + 48x^2 - 128x + 87 = 0$ und stelle sie in der Gauss'sche Zahlenebene dar.

Aufgabe 2.6 (*) Die Gleichung $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x + 20 = 0$ hat die Lösung $1 + i$. Bestimme die restlichen Lösungen.

Aufgabe 2.7 (*) Bestimme a und b so, dass i und $-i$ Lösungen der Gleichung $z^4 + az^3 + bz^2 - 2z + 1 + 2i = 0$ sind und löse die Gleichung vollständig.

Aufgabe 2.8 (*) Die Gleichung $2x^3 - 5x^2 + 6x - 7 = 0$ hat die Lösungen x_1, x_2, x_3. Bestimme eine Gleichung 3.Grades mit den Lösungen x_1^2, x_2^2, x_3^2. (Tipp: Benutze den Satz von Vieta.)

2.3 Funktionen, Wachstum, Zerfall

Aufgabe 2.9 in sauberem Meerwasser verliert Licht 75 Prozent seiner Intensität pro Meter Eindringtiefe. Für die Lichtintensität über dem Wasser darf mit $I = 120W/m^2$ gerechnet werden.

a) Eine empfindliche Algenart verträgt eine Lichtintensität von höchstens $60W/m^2$ und braucht mindestens $10W/m^2$ zur Photosynthese. In welchem Bereich von Wassertiefen ist die Algenart anzutreffen? (Ein Antwortsatz ist verlangt.)

b) Welche Lichtintensität kommt noch auf dem Meeresboden in 100m Tiefe an? (Schreibe das Ergebnis in wissenschaftlicher Schreibweise.)

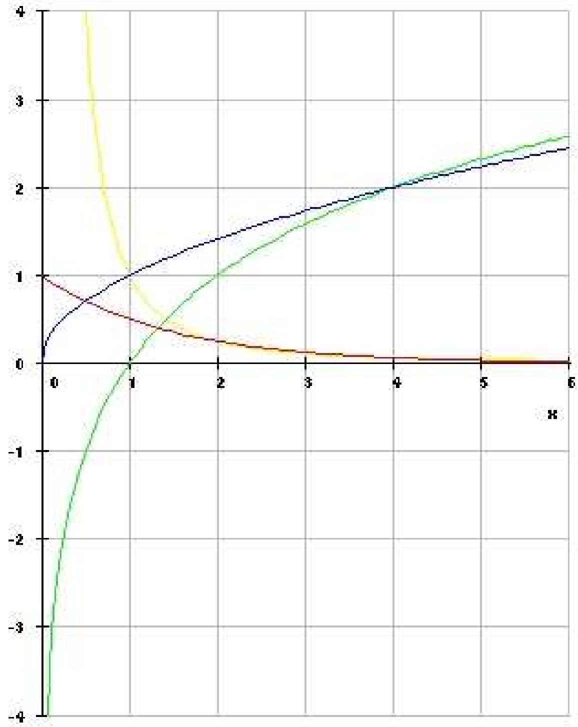
Aufgabe 2.10 Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Masse m der radioaktiven Substanz exponentiell mit der Zeit ab. Finde für jede Unteraufgabe die Funktionsgleichung, die den Zerfall beschreibt und die Zeit, nach der nur noch die Hälfte des Stoffes vorhanden ist.

a) Von Wismut zerfällt 13 Prozent pro Tag. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind 10g Wismut vorhanden.

b) Für bestimmte Untersuchungen wird in der Medizin radioaktives Jod verwendet. Von anfänglich 4mg sind nach 2 Stunden noch 2.25mg vorhanden.

c) Von einer gewissen Menge des Kohlenstoffisotops C14 sind nach 100 Jahren noch 79.04g übrig, nach 1000 Jahren noch 70.88g.

Aufgabe 2.11 Hier sind eine Wurzelfunktion $f(x) = x^{1/n}$, eine Logarithmusfunktion $g(x) = \log_a x$, eine Potenzfunktion $h(x) = x^{-n}$ und eine Exponentialfunktion $j(x) = a^{-x}$ gezeichnet. Dabei sind a und n grösser als Eins.
Ordne jedem Graphen eine der Funktionen f, g, h oder j zu.
(Vorsicht: zwei der Graphen liegen ab $x = 2$ praktisch übereinander.)



Aufgabe 2.12 (hat mit der Graphik rechts nichts zu tun) Eine Grösse wächst jährlich um 5 Prozent.

a) Um wie viele Prozente ist sie nach 8 Jahren gewachsen?

b) Nach welchem Zeitraum hat sie sich verdoppelt?

2.4 Folgen, vollständige Induktion

Aufgabe 2.13 (*) $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, ist das allgemeine Glied einer Zahlenfolge (a_n) und $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ die n-te Teilsumme. Berechne die ersten 4 Glieder der Folge (a_n) und der Teilsummenfolge (s_n). Suche eine Formel für s_n in Abhängigkeit von n und beweise sie mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 2.14 Gegeben ist die unendliche Reihe $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots$.

a) Suche eine Formel für die Summanden a_n dieser Reihe. Verechne dazu die einzelnen Nenner.

b) Berechne einige Partialsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ und errate eine Formel für s_n.

c) **(*)** Beweise die Formel.

d) Berechne die 'Summe' der Reihe.

e) **(*)** Mit welcher Partialsumme kommt man erstmals näher als 10^{-3} an die Summe dieser Reihe?

Aufgabe 2.15 Gegeben ist die unendliche geometrische Reihe $10 + 11 + \ldots$.

a) Wie viele Glieder sind kleiner als eine Million ?

b) Die Kehrwerte der Glieder bilden eine neue Reihe. Berechne, falls sie konvergiert, ihre Summe.

Aufgabe 2.16 **(*)** Die Zahlenfolge (a_n) sei gegeben durch die Startwerte $a_0 = 2, a_1 = -1$ und die Rekursion $a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) Zeige, dass es Konstanten p und q gibt, so dass sich a_n folgendermassen explizit darstellen lässt: $a_n = p^n + q^n$. Bestimme dazu zuerst die Konstanten p und q und beweise dann die Formel.

b) Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

2.5 Grenzwert bei Funktionen

Aufgabe 2.17 Bestimme t so, dass der Graph der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + tx + 2}{x^2}$ die Asymptote rechtwinklig schneidet.

2.6 Ableitung, Ableitungsregeln

Aufgabe 2.18 Berechne $f'(x)$ für

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2}$$

Aufgabe 2.19 Berechne $f'(\frac{\pi}{2})$ für $f(x) = (\sin x)^{\arctan \sqrt{x}}$.

Aufgabe 2.20 Bestimme die ersten 4 Ableitungen von $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$.

Aufgabe 2.21 **(*)** Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x+1)e^x$. Man suche anhand der Ableitungen f', f'', f''' eine einfache Formel für $f^{(n)}$ und beweise sie mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 2.22 Lege die Tangente vom Punkt $P(0/0)$ an den Graphen von $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$. Berechne die Koordinaten des Berührungspunktes.

Aufgabe 2.23 Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \tan x$?

Aufgabe 2.24 Bestimme a so, dass sich die Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = ax^3$ berühren.

2.7 Kurvendiskussion, Extremwertaufgaben, Newton

Aufgabe 2.25 Diskutiere

a) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{2x+3}$

b) $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$

Aufgabe 2.26 (*) Gegeben ist die Funktionsschar $f(x) = (x-a)e^x$. Für welches a geht die Wendetangente durch den Ursprung?

Aufgabe 2.27 Gegeben ist die Funktionsschar $f_t(x) = x^2 \cdot \ln \frac{1}{tx}, t > 0$.

a) Diskutiere die Funktion f_t in Abhängigkeit von t.

b) Zeichne den Graphen für $t = \frac{1}{2}$ und $t = 1$ für $x < 3$. (Einheit 4 cm).

c) Die Hochpunkte aller Funktionen f_t liegen auf einer Kurve. Wie heisst die Gleichung dieser Kurve?

Aufgabe 2.28 Durch den Wendepunkt des Graphen von $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$ und den Kurvenpunkt $P(4/y)$ legt man eine quadratische Parabel, die in P tangential an den Graphen von f ist. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Aufgabe 2.29 Wie gross ist der Basiswinkel α eines gleichschenkligen Trapezes mit Basislänge a und Schenkellänge b, damit sein Flächeninhalt maximal wird ?

Aufgabe 2.30 Dem Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $M(0/0)$ wird ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze $S(-1/0)$ einbeschreiben. Berechne x (=Abstand der Dreiecksbasis zu M)so, dass

a) das Volumen des Kegels, der durch Drehen des Dreiecks um die x-Achse entsteht, maximal wird.

b) der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.

Aufgabe 2.31 Gegeben ist ein Würfel mit Kantenlänge 5, dessen eine Ecke im Ursprung des räumlichen Koordinatensystems liegt und drei weitere Ecken bei $(5/0/0), (0/5/0)$ und $(0/0/5)$. Der Würfel wird von einem Dreieck geschnitten, dessen Ecken die Koordinaten $(t/0/0), (0/t/0), /0/0/t)$ haben. Bestimme t so, dass der Inhalt der Schnittfläche maximal wird.

Aufgabe 2.32 Ein Körper bestehe aus einem Rotationskegel (Grundkreisradius 1, Mantellinie x) mit aufgesetztem Kugelsegment; die Grundkreise von Kugel und Segment sind identisch. Die verlängerte Mantellinien des Kegels sind Tangenten des Segments. Für welches x hat der Körper minimale Oberfläche?

Aufgabe 2.33 Welcher Punkt der Kurve $f(x) = \ln(x)$ liegt dem Ursprung am nächsten? (Auf 2 Stellen genau)

2.8 Integrationsregeln

Aufgabe 2.34

Für welche a gilt:

$$\int_{-2}^{2} 0.5(e^x + e^{-x})\, dx = \int_{-2}^{2} (ax^2 + 1)\, dx$$

Aufgabe 2.35 (*) Es sei $I_n = \int_1^e x \cdot (\ln x)^n\, dx$.

a) Bestimme I_1.

b) Finde eine Rekursionsformal für I_n. (D.h. eine Formel, mit der I_n aus I_{n-1} berechnet werden kann.)

c) Berechne mit Hilfe dieser Formel I_4.

Aufgabe 2.36 Berechne

a) $$\int \frac{-5x^2 + 18x + 9}{x^2}\, dx$$

b) **(*)**

$$\int_0^2 \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+1)}\, dx$$

2.9 Flächen- und Volumenberechnungen mit Integralen

Aufgabe 2.37 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$.

a) Diskutiere die Funktion und zeichne den Graphen.

b) Berechne den Flächeninhalt des Gebietes, welches begrenzt ist durch die y-Achse, dem Graphen von f und der Tangente im Wendepunkt.

Aufgabe 2.38 Der Graph der Funktion $f(x) = (a+1)x - ax^3$, $a > 0$, schliesst mit der positiven x-Achse ein endliches Gebiet ein.

a) Für welchen Wert von a ist dessen Inhalt extremal? Welcher Art ist dieses Extremum?

b) Rotiert man für diesen Wert von a das Flächenstück um die x-Achse, so entsteht ein Körper. Berechne sein Volumen.

c) Berechne den Flächeninhalt des grössten zur x-Achse senkrecht stehenden Querschnittes dieses Körpers.

Aufgabe 2.39 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

a) Diskutiere die Funktion inkl. Graph (Einheit 2cm).

b) Der Ursprung und das Maximum legen eine Gerade g fest. g und der Graph von f begrenzen im ersten Quadranten ein Gebiet G. Berechne den Inhalt von G.

c) Wie lang ist die längste zur y-Achse parallele Strecke in G?

Aufgabe 2.40 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 3\sqrt{x}$ und $g(x) = \sqrt{36-3x}$. Die Graphen von f und g begrenzen zusammen mit der x-Achse ein Flächenstück. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 2.41 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-0.5x^2}$.

a) Diskutiere f vollständig und zeichne den Graphen für $-3 \leq x \leq 3$.

b) Für ein $t > 0$ sei $A(t)$ der Inhalt des Gebietes zwischen Kurve und x-Achse in den Grenzen 0 und t. Bestimme $A(t)$. Gegen welchen Grenzwert strebt $A(t)$ für t gegen ∞?

Aufgabe 2.42 Eine Kurvenschar mit den Parameter a wird beschrieben durch die Gleichung $f(x) = a\cos x + \frac{1}{a^2}$, wobei $a > 0$.

a) Skizziere den Graphen für $a = \frac{3}{2}$. Beschreibe das Verhalten der Kurvenschar für $a \to 0$ und $a \to \infty$.

b) Diese Kurven rotiere nun um die x-Achse. Berechne das Volumen der entstehenden Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 2\pi$ als Funktion von a.

c) Für welchen Wert von a wird das Volumen minimal?

3 Repetition Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1 Kombinatorik, einstufige Zufallsversuche

Aufgabe 3.1 Aus den 12 Tönen einer Oktave werden drei verschiedene ausgewählt und zu einem Motiv bestehend aus 5 gleich langen Tönen verarbeitet. Wieviele solche Motive gibt es?

Aufgabe 3.2 Auf wieviele Arten können die Buchstaben des Wortes $ALGEBRA$ angeordnet werden, wenn A nicht an erster Stelle stehen darf?

Aufgabe 3.3

a) Auf wieviele Arten lassen sich die neun Buchstaben des Wortes $SEBASTIAN$ in die neun Felder eines Quadrates der Seitenlänge drei einsetzen?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Wahl einer dieser Möglichkeiten alle vier Eckfelder mit den Buchstaben S und A belegt sind?

Aufgabe 3.4 Eine Behörde setzt sich aus 17 Frauen und 12 Männern zusammen. Zur Bildung einer Kommission werden 6 Personen ausgewählt. We gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Kommission nur aus Männern besteht?

b) die Kommission aus Frauen und Männern besteht?

3.2 Mehrstufige Zufallsversuche, bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 3.5

Eine Urne enthalte 4 grüne, n rote und $n - 2$ blaue Kugeln.

a) Es werde der Urne 6 Mal je eine Kugel entnommen und wieder zurückgelegt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, keine grüne zu ziehen.

b) Man zieht nacheinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, von jeder Farbe eine Kugel zu ziehen?

c) Für welches n ist diese Wahrscheinlichkeit am grössten?

Aufgabe 3.6 Jemand lässt in seinem Ferienhaus eine Alarmanlage installieren, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 bei einem Einbruch Alarm auslöst. Es besteht auch die kleine Wahrscheinlichkeit von 0.005, dass an einem Tag falscher Alarm ausgelöst wird. Die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch beträgt 0.001. Mit welcher Wahrscheinlichketi findet am Freitag den 13.September tatsächlich ein Einbruch statt, wenn die Anlage Alarm gibt?

3.3 Zufallsvariablen

Aufgabe 3.7 Felix besitzt zwei gefälschte Würfel, welche die beiden Augenzahlen '6' und '1' je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zeigen. Die übrigen Augenzahlen sind gleichwahrscheinlich untereinander. Damit die Fälschung nicht zu rasch erkannt wird, legt er einen gleich aussehenden Laplace- Würfel dazu und schlägt Regula folgendes Spiel vor:
Regula soll 3 Fr. Einsatz in die Mitte legen, Felix legt 1 Fr. dazu. Zwei der Würfel werden zufällig gezogen und gleichzeitig geworfen. Treten nur 'Einer' und 'Sechser' auf gewinnt Felix den Einsatz, sonst Regula.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Felix? Für wen ist das Spiel günstig?

b) **(*)** Wie beurteilt Regula, die nichts von einer Fälschung ahnt, das Spiel?

3.4 Binomialverteilung, Normalverteilung

Aufgabe 3.8 Von den 879 Schülern einer Schule sind 324 katholisch.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse von 20 Schülern genau 7 katholisch sind?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten Schüler weniger als 30 katholisch sind?

c) Die OR dieser Schule umfasst 295 Schüler. Wieviele OR-Schüler sind katholisch? (Erwartungswert und 95% Intervall)

Aufgabe 3.9 Eine Firma vertreibt Taschenrechner, die mit einer Wahrscheinlichkeit 10% fehlerhaft sind. Wieviel muss ich bestellen, um mit 95% Wahrscheinlichkeit 40 gute Rechner zu bekommen?

3.5 Testen von Hypothesen (*)

Aufgabe 3.10 **(*)** An einer gefährlichen Strassenkreuzung soll entweder eine Lichtsignalanlage oder eine Unterführung gebaut werden. Sind mindestens 60% der Bevölkerung gegen eine Unterführung wird eine Lichtsignalanlage gebaut.

a) Bei einer ersten Umfrage waren 15 von 20 Gefragten gegen die Unterführung. Beurteile das Resultat.

b) Bei einer zweiten Umfrage sollen 100 Personen gefragt werden. Erarbeite die Entscheidungsgrundlage und diskutiere die statistischen Fehler.

Aufgabe 3.11 **(*)** Von 45 OR-Schüler und 80 Gym-Schülern bestehen 39 OR- und 59 Gym-Schüler das erste Vordiplom an der ETH. Sind OR-Schüler besser vorbereitet?

4 Maturaufgaben

4.1 Maturaufgaben zur Vektorgeometrie

Aufgabe 4.1 Gegeben sind die drei Punkte M(1 | 1 | 0), A(5 | 2 | -8) und B(8 | 5 | 4). Bestimme eine Gleichung der Ebene E durch die drei Punkte und berechne den Neigungswinkel α dieser Ebene zur $x - y$-Ebene.

a) Zeige, dass das Dreieck AMB rechtwinklig und gleichschenklig ist.

b) Berechne die Koordinaten der Punkte C und D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat mit Mittelpunkt M beschreibt.

c) Berechne die Koordinaten der Punkte E und F so, dass der Körper mit den Eckpunkten ABCDEF ein reguläres Oktaeder beschreibt.

Aufgabe 4.2 Gegeben sind die beiden Punkte A(9 | -4 | -8) und B(-3 | 8 | -2) und die Gerade g

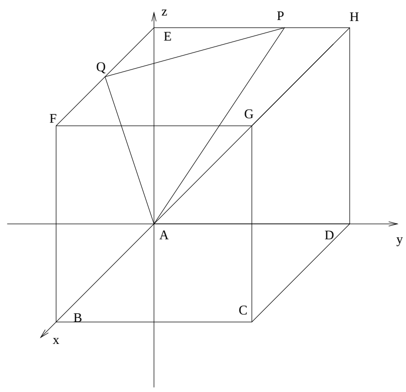
$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme den Winkel zwischen den Richtungsvektoren von g und (AB).

b) Bestimme C auf der Geraden g so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. (Rechter Winkel bei C.)

c) Bestimme eine Gleichung der Ebene E, die g enthält und parallel zu (AB) liegt.

Aufgabe 4.3 Ein Würfel mit Kantenlänge $k = 12$ liegt derart im Koordinatensystem, dass der Eckpunkt A die Koordinaten (0 | 0 | 0) besitzt. Drei der Würfelkanten liegen auf den positiven Koordinatenachsen.
Durch die Punkte P(0 | 8 | 12), Q(6 | 0 | 12) und A verläuft eine Ebene Δ.



a) Die Ebene Δ zerschneidet den Würfel in zwei Teile. Wie gross ist der Volumeninhalt des grösseren der beiden Würfelbestandteile?

b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden (PQ) und (GQ)?

c) Vom Würfeleckpunkt C fällt man das Lot auf die Ebene Δ. Welche Koordinaten bestitzt der Fusspunkt L des Lotes?

d) Eine zweite Ebene Γ enthalte den Würfeleckpunkt G und sei im übrigen parallel zur Ebene Δ. Wie weit sind die Ebenen Γ und Δ voneinander entfernt?

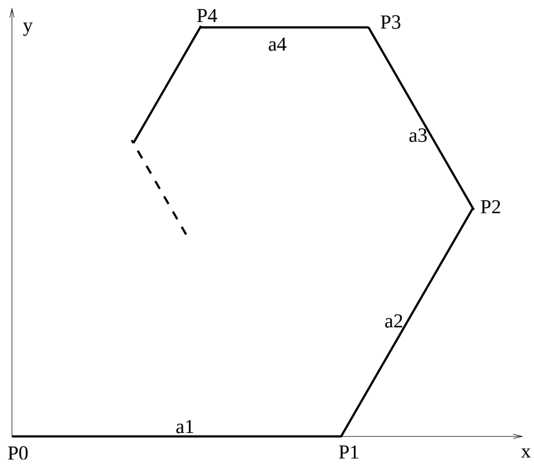
4.2 Maturaufgaben zu Folgen und Reihen

Aufgabe 4.4 Der skizzierte 'Spiralenweg' $P_0P_1P_2P_3P_4\ldots$ beginnt im Nullpunkt des Koordinatensystems, die Längen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ bilden eine unendliche geometrische Folge.
Es ist $a_1 = 10$ und $a_2 = 8$. Der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilstrecken beträgt jeweils $\alpha = 120°$.

a) Berechne die Länge des gesamten Weges.

b) Das wievielte Wegstück ist erstmals kürzer als 0.1?

c) Berechne die x-Koordinate des Punktes P_7.



Aufgabe 4.5

a) Gegeben ist eine geometrische Folge (a_n) mit $a_1 = 0.2$. Der Quotient q ist um $1/15$ grösser als der Grenzwert der zugehörigen Reihe. Wie gross ist q?

b) Bestimme den Grenzwert g der Folge $b_n = \dfrac{3n}{3n+2}$. Wie viele Folgenglieder unterscheiden sich um mehr als 0.001 vom Grenzert g?

c) arithmetische Folge: $305 + 289 + \ldots + x = 39$. Berechne x.

Aufgabe 4.6 Patienten nehmen Tabletten, die je 80mg des Wirkstoffs Z entalten. dieser Wirkstoff wird im Körper inerhalb einer Woche jeweils auf die Hälfte abgebaut (Exponentieller Zerfall).

a) Patient A schluckt am 1. Tag 10 Tabletten auf einmal. Wie viele g des Wirkstoffs sind am 10. Tage noch im Körper?

b) Wegen beträchtlicher Nebenwirkungen ist die Methode von Patient A nicht zu empfehlen. Patient B nimmt wie vorgeschrieben jeden Tag eine Tablette zu sich.

   1. Wieviel Wirkstoff wird auf diese Weise im Körper unmittelbar nach Einnahme der 10. Tablette im Körper vorhanden sein?
   2. Nach Einnahme der wievielten Tablette wird die optimale Dosis von 600mg erstmals überschritten?

c) Patient C schluckt entgegen den Vorschriften des Arztes jeden Tag 2 Tabletten.

   Nach Einnahme der wievielten Tablette wird so die lethale (tödliche) Menge von 1000mg erreicht?

d) Wird diese Dosis bei Einnahme einer Tablette täglich irgendwann erreicht?

4.3 Maturaufgaben zur Differential- und Integralrechnung

Aufgabe 4.7 Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$$

a) Bestimme die Nullstellen, die Extremalstellen sowie die Wendepunkte von f und zeichne den Graphen von f.

b) g ist eine steigende Gerade durch den Ursprung. Betrachte das endliche Gebiet G, welches im ersten Quadranten vom Graphen von f und der Geraden g begrenzt wird. Bestimme die Steigung der Geraden so, dass der Flächeninhalt dieses endlichen Gebietes G $\frac{25}{3}$ beträgt.

Betrachte nun die Funktionenschar

$$f_k(x) = -\frac{1}{3}x^3 + kx.$$

Dabei ist k eine reelle Zahl. Für welchen Wert von k

c) liegt das Maximum von f_k bei $x = 3$?

d) liegen sowohl das Maximum als auch das Minimum von f auf der Geraden $h(x) = \frac{8}{5}x$?

e) schneidet die Tangente im Wendepunkt von f_k die x-Achse unter dem Winkel $\alpha = 60°$?

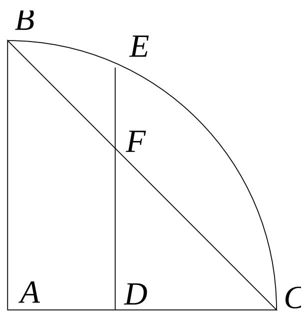
Aufgabe 4.8 $$f(x) = \frac{x(x-5)}{(x-2)^4}$$

a) Diskutiere die Funktion (ohne Wendestellen) und skizziere sie.

b) Berechne die Fläche, die durch Funktion und ihre Asymptote im Bereich $x > 5$ begrenzt wird. (uneigentliches Integral)

Aufgabe 4.9 a) Für welche ganzrationale Funktion 3. Grades mit $f(0) = -6$ ist die Nullstelle $x_1 = 3$ gleichzeitig Wendestelle mit der Steigung 5? Bestimme die Funktionsgleichung.

b) (*) Die Funktion hat noch zwei weitere Nullstellen. Eine davon liegt ungefähr bei 7. Verwende das Verfahren von Newton zwei Mal mit dem Startwert 7. Gib die verbesserte Lösung auf 6 Stellen nach dem Komma an.



Aufgabe 4.10 Aus einer Vorlesung über Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus den Jahren 1691/92
A ist das Zentrum des Viertelkreises, der durch B und C verläuft. Die Gerade DE verläuft parallel zu AB.
Bestimme den Punkt D so, dass EF maximal wird.

Aufgabe 4.11 Eine ganzrationale Funktion 3. Ordnung hat ihren Wendepunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Sie verläuft dort senkrecht zur Geraden $y = -0.5x$. Ausserdem schneidet sie die x-Achse im Punkte $N(6|0)$.

a) Bestimme die Gleichung der Parabel.

b) Die Kurve und die positive x-Achse umschliessen im ersten Quadranten eine Fläche. Halbiere diese Fläche durch eine Parallele zur y-Achse. Wie lautet die Gleichung dieser Geraden?

Falls dir a) nicht gelingt, nimm für b) die Funktionsgleichung $f(x) = 1/18x^3 + 2x$.

Aufgabe 4.12 Durch Rotation der Kurve mit der Gleichung

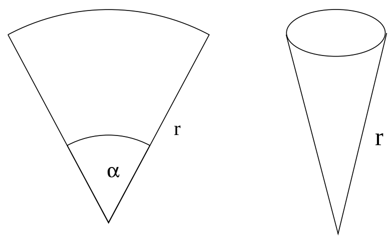
$$y = f(x) = 1/9(x+4)\sqrt{1-x^2}$$

um die x-Achse entsteht ein schönes Ei.

a) Bestimme das Volumen des Eis.

b) In welcher Entfernung von der Spitze hat das Ei die grösste Querschnittsfläche?

Aufgabe 4.13 Ein Kreissektor mit Radius r und Zentriwinkel α wird zu einem kegelförmigen Trichter zusammengerollt.



a) Berechne das Volumen des Trichters für $r = 3cm$ und $\alpha = 70°$.

b) Für welchen Zentriwinkel wird das volumen des Trichters maximal?

Aufgabe 4.14 $\dfrac{5\ln x}{x}$

a) Führe eine Kurvendiskussion durch.

b) Berechne den Flächeninhalt F des Gebietes, das durch das Bild der Funktion, der x-Achse und das Lot vom Wendepunkt auf die x-Achse begrenzt wird.

Aufgabe 4.15 Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$$

a) Untersuche die Symmetrie der Kurve. Bestimme die Schnittpunkte mit der x-Achse, sowie Hoch-und Tiefpunkte. Zeichne die Kurve im Intervall $[-3.5; 3.5]$

b) Bestimme die gleichung der Kurvennormalen n zur Kurve im Punkt $(0|0)$.

c) Die Normale n aus dem letzten Aufgabenteil schliesst mit k zwei Flächenstücke ein. Berechne die Summe ihrer Inhalte.

d) Die Schnittpunkte von n mit der Kurve bilden zusammen mit dem Hoch- und dem Tiefpunkt eine Schmetterlingsfigur, bestehend aus zwei Dreiecken. Berechne den Flächeninhalt dieser Schmetterlingsfigur.

Aufgabe 4.16 Die Tragseile einer Hängebrücke sind an Pfeilern befestigt, die 600m auseinander stehen. Sie hängen in Form einer Parabel, deren tiefster Punkt 100m unter den Aufhängungspunkten liegt.

a) Skizziere kurz die Situation und bestimme die Funktionsgleichung der Parabel, die die Tragseile der Hängebrücke darstellt.

b) Ermittle den Winkel zwischen Seil und Pfeiler der Brücke bei den Aufhängungspunkten.

c) Stell Dir vor, ein starker Wind lässt die Hängebrücke um die eigene Achse zirkulieren. Welches Volumen hätte der so entstehende Rotationskörper?

(Falls du die Funktionsgleichung unter a) nicht bestimmen kannst, rechne in b) und c) mit $y = 0.37x^2 - 75$).

Aufgabe 4.17 Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = \int_1^e x^t \cdot \ln x \, dx$$

Beachte: integriert wird nach x, es bleibt eine Funktion in t.

a) Löse das Integral durch partielle Integration. Dabei muss der Fall $t = -1$ separat behandelt werden. Der Rechenweg muss sichtbar sein.

b) Skizziere den Graphen von f mit Hilfe der Funktionswerte für $t = -2, -1, 0, 1$ und 1.5 (Einheit 4 Häuschen).

4.4 Maturaufgaben zur Stochastik

Aufgabe 4.18 Beim SCRABBLE, einem Gesellschaftsspiel für zwei bis vier Personen, gibt es einen Vorrat von 117 Holztäfelchen, auf denen je ein Buchstabe aufgedruckt ist. Als Mitspieler ziehe ich blindlings 7 Täfelchen und versuche, auf dem Spielfeld einige oder alle Buchstaben so anzuordnen, dass wie bei einem Kreuzworträtsel senkrecht und waagerecht sinnvolle Wörter entstehen.

Dabei kommen nicht alle Buchstaben gleich häufig vor. Hier sind einige Häufigkeiten aufgelistet

Buchstabe	B	D	E	N
Häufigkeit	2	6	16	10

Ich kann beginnen und ziehe als erster meine 7 Täfelchen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit habe ich genau 2, mit welcher wenigstens einen Buchstaben „E"?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehe ich gerade die Buchstaben, die ich für das Wort „BEENDEN"brauche?

Aufgabe 4.19 Bei einem Kongress sind 40 Prozent aller Teilnehmer Amerikaner. Jeder achte Amerikaner trinkt zum Frühstück Tomatensaft. Von den Nichtamerikanern tut das jeder achtzigste. Man sieht beim Frühstück einen Teilnehmer Tomatensaft trinken. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er ein Amerikaner ist?

Aufgabe 4.20 Bananen werden in Bündeln à 5 Stück verkauft. Dabei sei eine Banane mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 Prozent faul.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Bündel keine faule Banane enthalten ist?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Bündel genau 2 faule Banane enthalten sind?

c) Wie viele Bündel muss man kaufen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.9 Prozent mindestens 1 Bündel dabei hat, das keine faule Bananen enthält?

d) Ein Händler kauft 1000 Bündel zu 1.20 pro Bündel ein und verkauft das Bündel zu Fr. 2,50. Kann ein Kunde nachweisen, dass in seinem Bund mehr als 1 Banane faul ist, so wird ihm der Gelbetrag für das ganze Bündel zurückerstattet.

Mit welchem Gewinn kann der Händler beim Verkauf aller Bananen rechnen?

Aufgabe 4.21 Man wirft zwei faire Münzen. Es werden die Münzen, welche „Zahl"zeigen beiseite gelegt und deie restlichen Münzen werden erneut geworfen.

Kann man bereits nach einem Wurf beide Münzen beiseite legen, gewinnt man 1 Franken, ist dies nach zwei Würfen der Fall, gewinnt man 6 Franken. In allen anderen Fällen verliert man 2 Franken.

a) Berechne Erwartungswert und Streuung des Gewinns.

b) Man spielt nun mit zwei Münzen, welche „Zahl"mit Wahrscheinlichkeit p zeigen. Für welches p wird der Erwartungswert des Gewinns maximal?