Maturitätsprüfung 2007

Mathematik

Klasse 4bN

Kantonsschule Solothurn

Mathematisch-naturwissenschaftliches Maturitätsprofil

Name: **Note:**

Hinweise zur Bearbeitung der Prüfung:

- Zur Lösung der Aufgaben stehen drei volle Stunden zur Verfügung.
- Alle Aufgaben geben die gleiche Punktzahl.
- Jede Aufgabe ist auf einer neuen Seite zu lösen.
- Taschenrechner TI89 und Formelsammlungen dürfen verwendet werden.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich und vollständig sein.
  Details zur Verwendung des TI89:
  - Werden Gleichungen gelöst, Funktionen abgeleitet oder Anzahlen in der Kombinatorik mit dem TI-89 berechnet, so müssen diese schriftlich festgehalten werden.
    (Zum Beispiel p=25!/27!=0.0014 statt p=0.0014).
  - Die Funktionen fMin, fMax, Minimum und Maximum des TI89 dürfen im Lösungsweg nicht verwendet werden.

Ich wünsche viel Erfolg!
Torsten Linnemann

Erreichte Punktzahl:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte						

Summe:

1. Zwei unabhängige Aufgaben:

   a) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = (x^2 + 2x + 5) \cdot x \cdot (x + 42)$.

      i. Bestimme ohne Taschenrechner alle (auch die komplexen) Nullstellen der Funktion.

      ii. Für welche reellen Zahlen wird f negativ? (Begründung ebenfalls ohne Taschenrechner)

   b) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und geht durch $A(-1/3)$ und $B(2/0)$.

      i. Bestimme die Funktionsgleichung.

      ii. Wie lautet die Gleichung der Wendetangente (Tangente im Wendepunkt)?

2. Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto 4 - 3e^{-0.5x}$ und $g : x \mapsto e^{0.5x}$.

   a) Bestimme allfällige Nullstellen, Extrema und Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ und zeichne die Graphen.

   b) Bestimme den Schnittwinkel der Graphen im Schnittpunkt mit der kleineren x-Koordinate.

   c) Für welche reelle Zahl a mit $0 < a < 2$ schneiden die Graphen von f und g aus der Geraden $x = a$ eine Strecke mit möglichst grosser Länge ab?

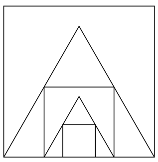
   d) Die Graphen von f und g, die Gerade $y = 4$ und die Gerade $x = z$ mit $z > e$ begrenzen eine Fläche mit Inhalt $A(z)$.
   Bestimme $A(z)$ und

   $$\lim_{x \to \infty} A(z).$$

3. Zwei weitere unabhängige Aufgaben:

   a) Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = a_n + 2n$, $a_5 = 24$.
   Berechne a_2.

   b) In untenstehender Figur ist einem Quadrat der Seitenlänge a ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, in dieses wiederum ein Quadrat, usw.

      i. Berechne die Seitenlänge des zweiten Quadrats in Abhängigkeit von a.

      ii. Berechne die unendliche Summe aller Quadratflächen.

BITTE WENDEN!

4. Die Kante AS einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ und Spitze S liegt auf der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das Grundflächenquadrat liegt in der Ebene $\mathbb{E}: \ 3x + 2y - z - 3 = 0$.
Die Höhe der Pyramide beträgt $h = 4\sqrt{14}$

a) Berechne die Koordinaten von A, B, C, D, S. (Eine von zwei Lösungen für S reicht.)

b) Berechne den Winkel zwischen AS und $\mathbb{E}$.

c) Berechne das Volumen der Pyramide.

5. Gegeben sind die folgenden Kongruenzabbildungen:

- F ist die Spiegelung an der Geraden $y = 3x$
- G ist die Spiegelung an der Geraden $y = 6x$
- H ist die Spiegelung an der Geraden $y = x + 2$
- C ist die zentrische Streckung am Ursprung mit Streckfaktor 2.

a) Bestimme die Matrix von $F \circ G$. Um was für einen Typ von Kongruenzabbildung (linearer Abbildung) handelt es sich?

b) Weise nach, dass H keine lineare Abbildung ist. Berechne das Bild des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ unter der Abbildung $H \circ G$.

c) Berechne das Bild des Kreises $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 23$ unter der Abbildung C. (Gefragt sind Mittelpunkt und Radius).

6. Eine Firma stellt aus Schokolade Überraschungseier wie folgt her: Im Innern der Eier hat es in jedem 6. Ei ein Spielzeugauto, in 40% der Eier eine Comicfigur und in den restlichen Eiern ein Plastiktier.

a) Marcel kauft 3 Eier. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
   i. genau 3 Comicfiguren
   ii. mindestens ein Plastiktier
   iii. genau ein Spielzeugauto, ein Plastiktier und eine Comicfigur

   in den Eiern hat?

b) Manuela kauft zwei Überraschungseier. Wie müssen die Wahrscheinlichkeiten für die Comicfiguren und die Plastiktiere verändert werden, so dass sie mit 25Prozent Wahrscheinlichkeit genau ein Plastiktier erhält.

c) Der Spielgruppenleiter Christian kauft 100 Eier. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
   i. genau 40 Plastiktiere
   ii. zwischen 36 und 44 Comicfiguren (inklusive Grenzen)

   in den Eiern hat?

d) André hatte in seinen letzten 50 Überraschungseiern nur 4 Spielautos. Er behauptet jetzt, dass es weniger als in jedem 6. Ei ein Spielauto hat. Was meinst du zu Andrés Behauptung?

Lösungen

Aufgabe 1

a) reelle Nullstellen 0 und -42

komplexe Nullstelle: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

Für $x \geq 0$ sind alle Faktoren positiv, die Funktion also auch.

Für $-42 < x < 0$ ist nur der mittlere Faktor negativ, die Funktion also auch.

Für $x < -42$ sind zwei Faktoren positiv, einer negativ. Die Funktion ist positiv.

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit

$f(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f(-1) = 3$ und $f(2) = 0$.

Also $f(x) = X^3 - 4X$.

Es ist $f'(0) = 0$ und $f(0) = 0$, also $y = -4x$ die Tangente.

Aufgabe 2

f hat eine Nullstelle bei -0.575, g hat keine Nullstelle.

Beide Funktionen haben keine Extrema.

Die Grenzwerte sind $\lim_{xto\infty} f(x) = 4$; $\lim_{xto-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{xto\infty} g(x) = \infty$; $\lim_{xto-\infty} g(x) = 0$;

b) Die Schnittpunkte sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 2.197$,
bei $x = 0$ hat f die Steigung 1.5, also den Steigungswinkel $56.31°$.

g hat die Steigung 0.5, also den Steigungswinkel $29.74488°$.

Der Schnittwinkel beträgt $29.74°$.

c) Der Abstand wird gegeben durch $f - g$. Es ist also die Gleichung $(f-g)'(x) = 1.5 \cdot 0.61^x - 0.5 \cdot 1.65^x = 0$ zu lösen: $x = 1.10$.

d) Es ist $g(x) = 4$ für $x_3 = 2.77$

Die Fläche ist

$$\int_{x_2}^{x_3} g(x) - f(x) dx + \int_{x_3}^{z} 4 - f(x) dx = 1.70 - 6 \cdot 0.61^z$$

Der Grenzwert ist 1.70.

Aufgabe 3

a) $a_4 = 24 - 8$;
$a_3 = 24 - 8 - 6$;
$a_2 = 24 - 8 - 6 - 4 = 6$

b) $h = \sqrt{3}/2 \cdot a$.

Die Geradengleichung der linken Seite des ersten Dreiecks lautet damit $y = \sqrt{3}x$ und

$a_2 = \sqrt{3}(a/2 - a_2/2)$.

Nach a_2 aufgelöst: $a_2 = (2\sqrt{3} - 3)a$.

Die Folge der Seitenlängen ist eine geometrische Folge mit $q = 2\sqrt{3} - 3 \cong 0.46a$.

Die Folge der Quadratflächen ist eine geometrische Folge mit $q = (2\sqrt{3} - 3)^2$.

Damit ergibt sich als Gesamtfläche $A = \dfrac{a^2}{1 - (2\sqrt{3} - 3)^2} \cong 1.27a^2$.

Aufgabe 4

Der Punkt A ergibt sich, indem die Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt wird: $t = -2$ und $A(-2|5|1)$.

Berechnung von S: Zuerst wird der Normalenvektor der Ebenengleichung normiert. $\dfrac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Damit liegt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm 4\sqrt{14} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in der Ebene. Setzen wir nun für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die Geradengleichung und das Ganze in die Ebenengleichung ein, so ergeben sich die beiden Lösungen $t = -3$ oder $t = -1$.

Für die beiden Lösungen ergebibt sich jeweils eine andere Rechnung:

<u>1. Fall $t = -1$</u>

Dies in die Geradengleichung eingesetzt gibt $S(-15|7|0)$ und für den Mittelpunkt

$\begin{pmatrix} -15 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $M(3| - 1|4)$.

Da $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$ ergibt sich $C(8| - 7|7)$.

Um B und D zu berechnen brauchen wir einen Vektor in der Ebene, senkrecht zu $\overrightarrow{AM}$. Dazu bilden wir das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix}$.

Die Länge von $\overrightarrow{MC}$ muss gleich der Länge von $\overrightarrow{AM}$, also $\sqrt{70}$ sein. Damit ergibt sich $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{14} \\ 2\sqrt{14} \end{pmatrix}$

und

$B(3| -1 + \sqrt{14}$
$4 + 2\sqrt{14})$ und $D(3| -1 - \sqrt{14}$
$4 - 2\sqrt{14})$

<u>2. Fall $t = -3$</u>

Dies in die Geradengleichung eingesetzt gibt $S(-19|3|2)$ und für den Mittelpunkt

$\begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, also $M(-7|11|-2)$.

Da $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$ ergibt sich $C(-12|17|-5)$.

b) Der Winkel ASE beträgt $60.794°$

c) Das Volumen ist $\frac{1}{3}(2\sqrt{35})^2 \cdot 4\sqrt{14} = 698.44$

Aufgabe 5

a) $\begin{pmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.95 & 0.32 \\ 0.32 & 0.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.31 \\ -0.31 & 0.95 \end{pmatrix}$

Es handelt sich um eine Drehung.

b)

$$\begin{pmatrix} -0.95 & 0.32 \\ 0.32 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.92 \\ 3.5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -0.92 \\ 1.5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.92 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.92 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.08 \end{pmatrix}$$

c) $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 23 \longleftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 23 + 1 + 9 = 32$.

Der Radius ist vorher $\sqrt{32}$, nach der Streckung also $2\sqrt{32}$. Der Mittelpunkt ist vorher $(1|3)$, nachher also $(2|6)$.

Aufgabe 6

a) i) $0.4^3 = 0.064$
ii) $1 - \left(\frac{17}{30}\right)^3 = 0.82$
iii) $6 \cdot 1/6 \cdot 4/10 \cdot 13/30 = 0.17$

b) $\binom{2}{1} \cdot p \cdot (1-p) = 0.25$, lösen gibt $p_{1,2} = 0.5 \pm \sqrt{1/4 - 1/8}$.
Die eine Lösung $p = 0.853$ ist zu gross, also ist $p = 0.146$ und die Wahrscheinlichkeit für eine Comicfigur beträt 0.69

c) $\binom{100}{40} \left(\frac{13}{30}\right)^{40} \left(\frac{17}{30}\right)^{60} = 0.065.$

$$\sum_{k=36}^{44} \binom{100}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{100-k} = 0.64$$

d) Hypothese: in jedem 6. befindet sich ein Spielzeugauto.

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{50}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{17}{30}\right)^{50-k} = 0.06$$

Es würde nur in 6 Prozent der Fälle so wenige Spielzeugautos geben. Auf 5 Prozent-Level würden wir nicht verwerfen, auf 10 Prozent-Level schon.