Aufgabe 1: Drei unabhängige Kurzaufgaben. Hier dürfen vom Taschenrechner nur die Grundfunktionen +,-, $\cdot$ und : verwendet werden.

a) Berechne das Taylorpolynom 3. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ von $f(x) = \dfrac{5}{3-x^2}$.

b) Finde eine Näherung für $\cos 1$ durch ein Taylorpolynom zweiter Ordnung. Tipp zum Entwicklungspunkt: $\dfrac{\pi}{3}$ liegt nahe bei 1 und $\cos\dfrac{\pi}{3}$ ist bekannt.

c) Betrachte die Folge $a_n = \dfrac{4-3^{n-1}}{4^n}$.

Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 2: Gegeben sind die Punkte $A(1|1|3)$ und $B(4|5|3)$

a) Finde die Punkte C und D so, dass $ABCD$ ein Quadrat wird, das parallel zur x-y-Ebene liegt. Die erste Komponente von D soll positiv sein.

b) Finde den Mittelpunkt S einer Kugel, die $ABCD$ im Diagonalenschnittpunkt M berührt und den Radius 10 hat. (Solltest Du den letzten Aufgabenteil nicht gelöst haben, so darfst Du mit $C(1|7|2)$ und $D(-2|5|2)$ rechnen.)

c) Berechne den Winkel zwischen den Kanten AB und AS. (Du darfst mit $S(0|5|12)$ rechnen.)

d) Bestimme den Abstand zwischen den Geraden AS und CD

Aufgabe 3: Finde eine gebrochen rationale Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

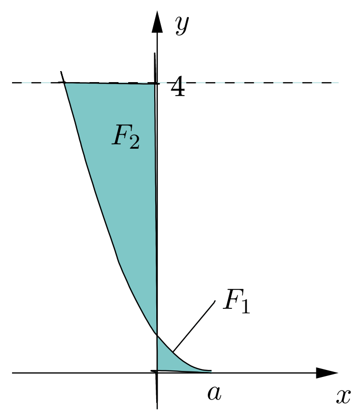
1. Bei $x = 5$ befindet sich ein Pol mit Vorzeichenwechsel.
2. Es gibt eine lineare Asymptote mit Steigung $-1/2$
3. $f(0) = -0.9$
4. Die Tangente in $(4|f(4))$ an den Graphen hat die Nullstelle $\dfrac{11}{3}$.

Tipp: Es gibt eine Lösung, bei der im Zähler eine quadratische Funktion steht.

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4: Betrachtet wird der Graph der Funktion $f(x) = (x - a)^2$. Dabei ist a ein Parameter, der Werte zwischen 0 und 2 annehmen kann.

Die Fläche F besteht aus den Teilflächen F_1 und F_2 wie im Bild markiert: F_1 ist die Fläche zwischen Graphen und x-Achse für x zwischen 0 und a. F_2 ist die Fläche zwischen der Geraden $y = 4$ und dem Graphen von f für x zwischen $a - 2$ und 0.



a) Wie gross ist die Fläche F für $a = 0.5$?

b) Für welches a wird die Fläche minimal?

c) Berechne das Rotationsvolumen bei Rotation von F um die y-Achse für $a = 0.5$.

d) Für welches a wird das Rotationsvolumen maximal?

Aufgabe 5: In einem Laden werden Abziehbilder mit Fussballspielern darauf verkauft. Die Bilder werden einzeln verkauft. Jedes 20. Bild zeigt einen Schweizer.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sammler bei 500 gekauften Bildern mindestens 35 Bilder mit Schweizern darauf erhält? (es dürfen Doppelte vorkommen.)

b) Wieder wird von 500 gekauften Bildern ausgegangen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl der Schweizer auf den Bildern um höchstens 10 Prozent vom Erwartungswert abweicht?

c) Wie viele Bilder müsste er einkaufen, damit er mit 99 Prozent Wahrscheinlichkeit mindestens 20 Bilder von Schweizern erhält?

d) Ein anderer Sammler kauft für seinen Sportverein 10000 Bilder. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen 200 und 800 Bilder mit Schweizern darauf erhält.

Aufgabe 6: Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme Eigenwert und Eigenvektor von A ohne Verwendung des TI89.

b) Bestimme $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

c) Welche Bedingung muss an eine Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gestellt werden, damit $AB = BA$ gilt?

d) Berechne jeweils die Matrixpotenz B^2,B^3 und B^4 für die B aus der letzten Teilaufgabe und stelle eine Vermutung auf für B^n. Beweise diese mittels vollständiger Induktion.