Lösungen

1. a) Ansatz $f(x) = ax^2+bx+c$, also $f'(x) = 2ax+b$. Die Bedingungen an die Ableitung geben die Gleichungen $6a + b = -2$ $10a + b = 2$ mit den Lösungen $a = 1$ und $b = -8$. Weiter ergibt $f(4) = 6$ die Gleichung $16-32+c = 6$ mit der Lösung c=22. Also ist $f(x) = x^2 - 8x + 6 = (x-4)^2 + 6$.

   b) Zunächst müssen Schnittpunkte berechnet werden:
   $f(x) = k(x) \Rightarrow x = 4.098$, $f(x) = g(x) \Rightarrow x = 6$, $h(x) = k(x) \Rightarrow x = 6$ und $g(x) = h(x) \Rightarrow x = 7.9$. Damit ist die Fläche
   $$\int_{4.098}^{6} f(x) - k(x)dx + \int_{6}^{7.9} g(x) - h(x)dx = 13.025$$

2.

   a) Ansatz $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) =$, $f(2) = 3$, $f''(2) = 0$ und$f'(2) = 2$.
   Dies gibt die Lösung $a = 1/16$, $b = -1/2$, $c = 3/2$ und $d = e = 0$.

   b)
   b.1) $h = \sqrt{0.9^2 - 0.1^2} = 0.894$ und $V = 0.2^2 \cdot h/3 = 0.012$.
   b.2) $V(x) = x^2/3 \cdot \sqrt{(1-x/2)^2 - (x/2)^2}$. Die Lösung von $V'(x) = 0$ ist $x = 4/5$. Dafür gilt $h = 0.447$.

3. Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit
$M_1(-0.5|0.5|2)$ und $M_2(-0.5|-3|4.5)$.
Also folgt $\overrightarrow{AM_2} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM_1} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$.

   a) Für den Umfang gilt $\left|\overrightarrow{AM_1}\right| + \left|\overrightarrow{AM_2}\right| + \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = 4.73 + 3.08 + 4.30 = 12.13$.
   Die Winkel berechnen sich zu
   $\angle M_1AM_2 = 62.5°$, $\angle AM_2M_1 = 78.03°$ und $\angle AM_1M_2 = 39.47°$.

   b) Es gilt
   $$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1.5 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$
   $$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Auflösen nach t gibt $s = 2 - t$. Dies in E_1 eingesetzt ergibt
   $$\begin{aligned} g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1-3 \\ -4+2 \\ 2+5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5-1.5 \\ -1+4.5 \\ -2.5+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3.5 \\ -2.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normalevektoren ergeben sich aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren zu $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 11.25 \\ 3.75 \\ 5.25 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Der Winkel zwischen den Vektoren beträgt $154,73°$, mithin ist der Winkel zwischen den Ebenen $25,27°$.

c) Idee: Gehe vom Koordinatenursprung auf der Geraden $\overrightarrow{x} = r \cdot \overrightarrow{n_1}$ zur Ebene. Es ergibt sich die Gleichung

$$r \begin{pmatrix} 11.25 \\ 3.75 \\ 5.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1.5 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

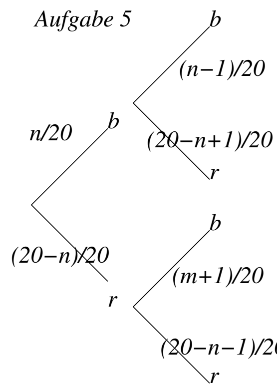
mit der Lösung $r = 0.04$. Es gilt $0.04 \cdot |\overrightarrow{n_1}| = 0.5187$ ist der Abstand zum Koordinatenursprung.

4. a) $$3 \cdot 0.05 \cdot 0.4^{5/7} = 0.078$$

b) $$\sum_{k=1}^{365} 3 \cdot \cdot 0.05 \cdot 0.4^{k/7} = 1.0697$$

c) Die Lösung der folgenden Gleichung gibt $x = 2,45$ Liter.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x \cdot 0.050.4^{k/7} = 1.$$



5. Der Baum zeigt die Wahrscheinlichkeiten für allgemeines n an. Für n=15 ergibt sich $P(X = 2) = 15/20 \cdot 14/20 = 21/40$, $P(X = -1) = 1/20$ und es bleibt $P(x = 4) = 17/40$.
Der Erwartungswert ist also $2 \cdot 21/40 + 4 \cdot 21/40 - 1/20 = 2.7$
Es gilt

$$\mu(n) = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{400} + 4 \cdot \frac{n(20-n+1) + (20-n)(n+1)}{400} - \frac{(20-n)(20-n-1)}{400}$$

Die Lösung von $\mu'(n) = 0$ ist $n = 14.07$. Vergleich von $\mu(14)$ und $\mu(15)$ zeigt, dass die Lösung $n = 14$ ist.

6. a) $$\sum_{k=0}^{35} \begin{pmatrix} 50 \\ k \end{pmatrix} 0.8^k \cdot 0.2^{50-k}$$

b) b.1) $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{41}{13} & -\frac{6}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{24}{13} \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 35/13 \\ 29/13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 135/13 \\ 33/13 \end{pmatrix}$$

Sollte die Lösung nicht g':x=(35/13;29/13) + s(135/13;33/13) sein? ja

b.2) Die Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 0.37 \\ 0.92 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -0.94 \\ -0.31 \end{pmatrix}$.

Die folgenden Eckpunkte lösen das Problem:
$A(-0.94|0.31)$, $B(-0.37|-0.92)$, $C(0.94|0.31)$ und $D(0.37|0.92)$. Jede zentrische Streckung dieser Ecken am Ursprung stellt auch eine Lösung dar.