Lösungen

Aufgabe 1 a) Es gilt $f(x) = \frac{5}{3-x^2} = \frac{5}{3}\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}}$. Dies ist der Grenzwert der geometrischen Reihe $\frac{5}{3}q^{n-1}$ mit $q = \frac{x^2}{3}$. 1 Punkt

Also gilt $j_{3,0}f(x) = \frac{5}{3}(1 + \frac{x^2}{3})$ 1 Punkt

Alternativer Lösungsweg:
Bestimme die 3 Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{10x}{(x^2-3)^2}\,;\; f''(x) = \frac{-30(x^2+1}{(x^2-3)^3}\,;\; f'''(x) = \frac{120(x^2+3)}{(x^2-3)^4}$$

je 0,25 auf die Rechenwege

Als Taylorpolynom ergibt sich

$j_{3,0}f(x) = \frac{5}{3} + 0 + \frac{10}{9}\frac{x^2}{2} + 0$ auf jeden Summanden 0,25

$= \frac{5}{3} + 0 + \frac{5}{9}x^2$ 0,25

b) Es gilt $\cos\pi/3 = 0.5 und \sin\pi/3 = \sqrt{3}2$. Damit ist $j_{4,\pi/3}f(x)$

$= \cos\pi/3 - \sin\pi/3(x-x_0) - 0.5\cos\pi/3(x-x_0)^2$ 1,25

$= 0.5 - \sqrt{3}2(1-\pi/3) - 0.5^2(1-\pi/3)^2$ 0.75

=0.540317 (Der wahre Wert ist 0.54032).

bei falschem Entwicklungspunkt: höchstens 1 Punkt; statt 1 eine andere Zahl eingesetzt: höchstens 1, beides falsch: noch 0,25 Punkte, Gradmass: 0,25 Punkte Abzug.

c) Es gilt $\frac{4-3^{n-1}}{4^n} = \frac{4}{4^n} - \frac{3^{n-1}}{4^n} = 4\frac{1}{4^n} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$. 1

Dies ist die Differenz zweier geometrischer Folgen. Ihre Grenzerte sind 0 (die Folge hat also auch Grenzwert 0). Für die Summe gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_n = 16/3 - 4/3 = 4$. 1

Aufgabe 2 a)

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,25

Der gesuchte senkrechte Vektor steht auf diesem senkrecht und auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Mit Kreuzprodukt oder einem Gleichungssystem mit 2 Mal Skalarprodukt findet sich als Normalenvektor zum Beispiel $\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$. 0,5

Normierung auf die Länge 5 gibt $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}$. 0,25

Es folgt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und genauso $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ je 0,25

b) Es gilt $\overrightarrow{OM} = 0.5 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1.5 \\ 3 \end{pmatrix}$ 0.5

Und, als Normalenvektor in z-Richtung mit Länge 10: $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ 0,25

und also $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1,5 \\ 13 \end{pmatrix}$ 0,75

(Lösung mit gegebenen Vektoren weiter unten)

c) Mit der Formel für den Winkel zwischen Vektoren folgt 76,37 Grad 1,5

d) Es gilt $\overrightarrow{AS} x \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -20 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix}$ Normalenvektor ist also zum Beispiel $\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. 0,5

Zu lösen ist die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 10 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0,25

Dies benötigen die Lösung $y = -4/9$ 0,25

und erhalten als Abstand $\left| \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (-4/9) \right| = 4\sqrt{125}/9 = 4,969.$ 0,5

Aufgabe 2, Lösung mit den gegebenen Punkten

b Hier gilt $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ 0,5

(Es durfte stillschweigend angenommen werden, dass ABCD wieder ein Quadrat bilden, was eigentlich nicht stimmt.) Wieder Mit Kreuz- oder Skalarprodukt ergibt sich der „Normalenvektor“ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 9 \end{pmatrix}$ 0,5

welcher noch auf die Länge 10 zu normieren ist 0,5

c) 74,77 Grad 1,5

d) Es gilt $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor zu den Geraden ist mit dem Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 18 \\ -27 \\ 14 \end{pmatrix}$ (da die Grundfläche kein Quadrat ist, sind andere möglich) 0,5

Es wird die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 18 \\ -27 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0,25

gelöst,was r=-176/1249 ergibt. 0,25

Wir erhalten als Abstand $176\sqrt{1249}/1249 = 4,98$. 0,5

Aufgabe 3 Im Nenner steht $(x-5)$ 1

Ein quadratischer Term ist ax^2+bx+c 1

Damit die Asymptote $-1/2$ ist, setzen wir $a=1$ und fügen eine -2 im Nenner ein. Alternativ wäre auch $a=-1/2$ möglich. 1

Einsetzen von 0 und Gleichsetzen mit -0.9 gibt $c=-9$ 1.

Damit ist $f(x)=\dfrac{x^2+bx-9}{-2(x-5)}$ mit $f(4)=\dfrac{4b+7}{2}$ und $f'(4)=\dfrac{5(b+3)}{2}$, also ergibt sich als Tangentengleichung $y=\dfrac{5(b+3)}{2}\left(x-\dfrac{4b+7}{2}\right)$. Einsetzen von $(11/3|0)$ und Auflösen nach b ergibt $b=-6/7$ 2

Aufgabe 4a)

Die Lösung ist

$$4(2-a)-\int_{a-2}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=17/12=3,417$$

für $a=-0,5$ Jeder Summand gibt 0,5 Punkte

b) Es gilt $I(a)=2a^3/3-4a+16/3$. 0,5

Ableiten gibt $2a^2-4=0$ mit den Nullstellen $\pm\sqrt{2}$. 0,5.

Es gilt $I(\sqrt{2})=1,56$ und $I(0)=16/3$ und $I(2)=8/3$. Das Minimum liegt bei $\sqrt{2}$. 0,5.

c) Die Umkehrfunktionen sind $y=\pm\sqrt{x}+a$ 0,5

Die richtige Funktion ist $y=-\sqrt{x}+a$ 0,75

Zu berechnen ist also

$$\pi\int_0^4(0,5-\sqrt{x})^2dx=11\pi/3=11,52$$

0,75

Bei Rotation um die x-Achse gibt es noch 1 Punkt

d) Wir betrachten die Funktion

$$V(a)=\pi\int_0^4(a-\sqrt{x})^2dx=\frac{4\pi}{3}(3a^2-8a+6)$$

0,5

Die Ableitung ist $8\pi(3a-4)/3)$.. Nullsetzen gibt $a=4/3$. 0,25

Vergleich der Funktionswerte an den Stellen $0, 4/3$ und 2 zeigt, dass das Maximum bei $a=0$ mit 8π angenommen wird. 0,25

Aufgabe 5a)

$$1-\sum_{k=0}^{34}\begin{pmatrix}500\\k\end{pmatrix}0.05^k 0.95^{500-k}=0,03$$ 1.5, Summe von 35 bis 500 ohne Ergebnis: 1

Die Aufgabe kann auch mit der Normalverteilung gelöst werden.

b) Der Erwartungswert ist $500\cdot 0.05=25$ 0.5

Gefragt sind *weniger* als 10 Prozent Abweichung, also 23 bis 27. 0.5

$$\sum_{k=23}^{27}\begin{pmatrix}500\\k\end{pmatrix}0.05^k 0.95^{500-k}=0,39$$ 0.5

c) Es muss gelten

$$\sum_{k=0}^{19}\begin{pmatrix}500\\k\end{pmatrix}0.05^k 0.95^{500-k}\cong 0.01$$ 0,75

Probieren ergibt 631 Bilder. 0.75

d) Hier hilft die Normalverteilung.

Es gilt $\sigma=21,7945$.

Die Gauss-Kurve ist zwischen $\pm 13,78788$ zu integrieren.

Das Ergebnis ist 0,999999999994. 1,5 Fehlinterpretationen des Ergebnisses geben 0,25 Punkte Abzug.

Aufgabe 6a) Das charakteristische Polynom ist $(1-\lambda)(1-\lambda)$, der Eigenwert ist 1. 0.75

Der Eigenvektor ist eine Lösung von $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Also $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 0.75

b) $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ 1,5

c) Mit $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ folgt $AB=\begin{pmatrix}a&d+b\\0&d\end{pmatrix}$ 0,5

und $BA=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$. 0,25

und damit zunächst $c=0$ und dann $d=a$ 0,75

d) Behauptung $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&n\cdot a^{n-1}\cdot b\\0&a^n\end{pmatrix}$. 0,75

Für $n=1$ stimmt dies. Weiter gilt 0,25

$$\begin{pmatrix}a^n&n\cdot a^{n-1}\cdot b\\0&a^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^{n+1}&(n+1)a^n\cdot b\\0&a^{n+1}\end{pmatrix}$$ 0,5