Lösungen

Aufgabe 1a

Die Lösung ist

$$4(2-a)-\int_{a-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=17/12=3,417$$

für $a=-0,5$

Der erste und zweite Summand gibt je 0,75, der dritte 0,5 Punkte

b) Es gilt $I(a)=2a^3/3-4a+16/3$. 0,5

Ableiten gibt $2a^2-4=0$ mit den Nullstellen $\pm\sqrt{2}$. 0,5

Es gilt $I(\sqrt{2})=1,56$ und $I(0)=16/3$ und $I(2)=8/3$. Das Maximum liegt bei Null. 1.

c) Die Umkehrfunktionen sind $y=\pm\sqrt{x}+a$ 0,5

Die richtige Funktion ist $y=-\sqrt{x}+a$ 0,75

Zu berechnen ist also

$$\pi\int_{0}^{4}(0,5-\sqrt{x})^2dx=11\pi/3=11,52$$

0,75

Bei Rotation um die x-Achse gibt es noch 1 Punkt

Aufgabe 2 Kreisradien werden mit k bezeichnet, Seitenlängen mit a.

Aus der Formelsammlung folgt für den Inkreis $k_1=a\sqrt{3}/6=5\sqrt{3}/6$ 0.75

Für den Umkreis gilt $k_1=a_2\sqrt{3}/3$ und damit $a_2=2,5$. Es gilt also $k_2=K_1/2=5\sqrt{3}/12$. 1,25

b)Wir haben es mit einer geometrischen Folge mit $a=0,5$ zu tun. Es gilt $k_10=k_1/512=0,002819$. 1

c) Die erste Kreisfläche Minus die zweite Dreiecksfläche gibt:

$$\pi\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2-\frac{2,5^2}{4}\sqrt{3}=3,8387$$

1.5

Hier gilt $q=1/4$. 0.5

Der Grenzwert der entsprechenden geometrischen Reihe ist 5,118 1

Aufgabe 3 Im Nenner steht $(x-5)$ 1

Ein quadratischer Term ist ax^2+bx+c 1

Damit die Asymptote $-1/2$ ist, setzen wir $a=1$ und fügen eine -2 im Nenner ein. Alternativ wäre auch $a=-1/2$ möglich. 1

Einsetzen von 0 und Gleichsetzen mit -0.9 gibt $c=-9$ 1.

Damit ist $f(x)=\dfrac{-0,5x^2+bx+4.5}{x-5}$ und also $f'(4)=\dfrac{5(b+3)}{2}=1,5$, also $b=-2,4$. 2

Aufgabe 4a)

$$1-\sum_{k=0}^{34}\binom{500}{k}0.05^k0.95^{500-k}=0,03$$

1.5, Summe von 35 bis 500 ohne Ergebnis: 1

b) Der Erwartungswert ist $500\cdot 0.05=25$ 0.5

Gefragt sind *weniger* als 10 Prozent Abweichung, also 23 bis 27. 0.5

$$\sum_{k=23}^{27}\binom{500}{k}0.05^k0.95^{500-k}=0,39$$

0.5

c) $0.95^{30}=0,214$ 1,5

d) Es muss gelten

$$\sum_{k=0}^{19}\binom{500}{k}0.05^k0.95^{500-k}\cong 0.01$$

0,75

Probieren ergibt 631 Bilder. 0.75

Aufgabe 5a $\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ 2

16!/8! oder 16! geben 1 Pkt.

b) $\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix}$ 4

16!/8! + 16!/7! + 16!/6! gibt 3 Punkte. Bei anderen Fehlern, insbesondere Multiplikationen gibt es noch bis zu 2 Punkten.

Aufgabe 6a Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,25

Der gesuchte senkrechte Vektor steht auf diesem senkrecht und auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Mit Kreuzprodukt oder einem Gleichungssystem mit 2 Mal Skalarprodukt findet sich als Normalenvektor zum Beispiel $\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$. 0,5

Normierung auf die Länge 5 gibt $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}$. 0,25

Es folgt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und genauso $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ je 0,25

b) Es gilt $\overrightarrow{OM} = 0.5 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1.5 \\ 3 \end{pmatrix}$ 0.5

Und, als Normalenvektor in z-Richtung mit Länge 10: $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ 0,25

und also $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1,5 \\ 13 \end{pmatrix}$ 0,75

(Lösung mit gegebenen Vektoren weiter unten)

c) Mit der Formel für den Winkel zwischen Vektoren folgt 76,37 Grad 1,5

d) Beide Ebenen haben den gemeinsamen Punkt S und den gemeinsamen Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$. Als Geradengleichung ergibt sich also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 1.5 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1,5

Aufgabe 6, Lösung mit den gegebenen Punkten

Hier gilt $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ 0,5

(Es durfte stillschweigend angenommen werden, dass ABCD wieder ein Quadrat bilden, was eigentlich nicht stimmt.) Wieder Mit Kreuz- oder Skalarprodukt ergibt sich der „Normalenvektor “ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 9 \end{pmatrix}$ 0,5

welcher noch auf die Länge 10 zu normieren ist 0,5

c) 74,77 Grad 1,5

d) Es werden zwei Ebenengleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

je 0,25

Auflösen nach t, u und v gibt $t = -\dfrac{44s + 44}{15}$. 0,5

Dies in die erste Ebenengleichung eingesetzt ergibt die Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} 49/5 \\ 191/15 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -49/5 \\ -116/15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

0,5