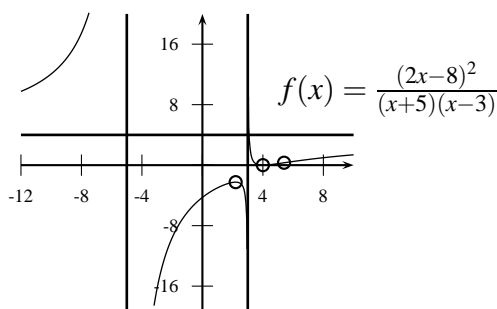


Lösungen Maturprüfung 2005

1. (11 P.) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{(2x-8)^2}{x^2+2x-15}$.

a) (7 P.) Bestimme den Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, hor. Asymptoten, Extrema (d.h. Minima und Maxima) und Wendestellen. Gib die gefragten Punkte jeweils in der Form $P(x|y)$ an.

- $f(x) = \frac{(2x-8)^2}{(x+5)(x-3)}$
- $f'(x) = \frac{8(x-4)(5x-11)}{(x^2+2x-15)^2}$
- $f''(x) = \frac{-8(10x^3-93x^2+264x-289)}{(x^2+2x-15)^3}$
- $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 3\}$ (1 P.)
- Nullstellen: $x = 4 \Rightarrow$ $N = (4|0)$ (0.5 P.)
- Pole: $x = -5, x = 3$ (0.5 P.)
- Asymptote: $y = 4$ (1 P.)
- Extrema: $x_1 = 4, x_2 = 11/5$ (0.5 P.)
 - $f''(4) > 0 \Rightarrow$ Min in $(4|0)$. (0.5 P.)
 - $f''(11/5) < 0 \Rightarrow$ Max in $(11/5|-9/4)$. (0.5 P.)
- Wendepunkte: $W = (5.4|0.32)$ (1 P.)
- Der Graph sieht folgendermassen aus: (1.5 P.)



b) (2 P.) Bestimme die Geradengleichung der Tangente des Graphen an der Stelle $x = 7$.

- $y = mx + b, P = (7|3/4)$.
- $m = f'(7) = 0.25$ (1 P.)
- $0.75 = 0.25 \cdot 7 + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow$ $y = 0.25x - 1$ (1 P.)

- c) (2 P.) Wir betrachten nun die allgemeinere Funktion $g(x) = \frac{(ax-8)^2}{x^2+2x-15}$. Bestimme a in der Funktion $g(x)$ so, dass $g(x)$ an der Stelle -4 die Steigung -3 hat.

$$\bullet \quad g'(-4) = \frac{8(a+2)(19a+24)}{49} = 42 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 2.07, a_2 = -5.33}} \quad (2 \text{ P.})$$

2. a) (5 P.) Der Helm eines Kirchturm ist gegeben durch die Funktionen $f_1(x) = \ln(x-1) - 0.75x + 5$ und $f_2(x) = 0.5x^2 - 1.5x + 4$. Berechne das Volumen des Turms. Das Ergebnis muss auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet werden.

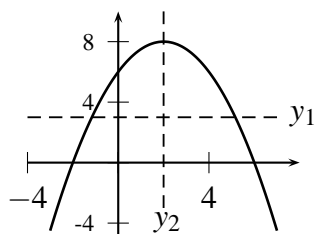
$$\bullet \quad f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x_1 = 2.63, x_2 = 1.33 \quad (1 \text{ P.})$$

$$\bullet \quad f_1(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 9.53 \quad (1 \text{ P.})$$

$$\bullet \quad \pi \int_0^{x_2} f_2(x)^2 dx + \pi \int_{x_2}^{x_3} f_1(x)^2 dx = 22.4\pi \approx \underline{\underline{70.50}} \quad (3 \text{ P.})$$

- b) (5 P.) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-6)$. Bestimme zwei Geraden so, dass der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse in vier gleich grosse Flächenteile unterteilt wird.

- Die Skizze sieht so aus:



$$\bullet \quad A = \int_{-2}^6 f(x) dx = \frac{128}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}A = \frac{64}{3} \quad (1 \text{ P.})$$

$$\bullet \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{1. Gerade: x = 2}} \quad (1 \text{ P.})$$

$$\bullet \quad 2. Gerade: y = t \quad (0.5 \text{ P.})$$

$$\bullet \quad \Rightarrow t = -\frac{1}{2}(x+2)(x-6) \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2(8-t)} + 2 \quad (1 \text{ P.})$$

$$\bullet \quad \int_2^{x_1} f(x) dx - t(x_1 - 2) = \frac{32}{3} \Rightarrow t = \underline{\underline{y = 2.96}} \quad (1.5 \text{ P.})$$

3. (8 P.) Es werden wiederholt Tennisbälle geworfen, nach jedem Wurf 3% weniger weit. Beim ersten Wurf werden 24m geworfen.

- a) (1 P.) Stelle die Folge auf, welche die Wurfweite beschreibt. Gib sowohl das explizite als auch das rekursive Bildungsgesetz an.

$$\bullet \quad \text{explizit: } \underline{\underline{a_n = 24 \cdot 0.97^{n-1}}} \quad (1 \text{ P.})$$

- rekursiv: $\underline{a_1 = 24, a_{n+1} = a_n \cdot 0.97}$ (1 P.)
- b) (1.5 P.) Beim wievielten Wurf werden erstmals weniger als 0.5 m geworfen ?
- $24 \cdot 0.97^n < 0.5 \Rightarrow n > 127 \Rightarrow \underline{\text{Beim 128. Wurf}}$ (1.5 P.)
- c) (2.5 P.) Der Ball wird nun jeweils vom Ankunftsort des vorherigen Wurfs geworfen. Wie weit kommt der Werfer so in 120 Würfen vorwärts ? Um wieviele Meter käme er weiter, wenn er unendlich oft werfen würde ?
- $s_{120} = 24 \frac{1 - 0.97^{120}}{1 - 0.97} = 779.313 \text{ m}$ (1 P.)
 - $s = \frac{a_1}{1 - 0.97} = \underline{800 \text{ m}}$ (1 P.)
 - $\Rightarrow \underline{d = 20.69 \text{ m}}$ (0.5 P.)
- d) (2 P.) Auch ein zweiter Werfer wirft jeden Wurf um den gleichen Prozentsatz weniger weit als den vorherigen. Dieser Prozentsatz ist allerdings nicht bekannt. Wir wissen aber folgendes: Beim 17. Wurf erreicht der Werfer 25 m und beim 22. Wurf immerhin noch 20 m. Wie weit wirft sie beim 80. Wurf ?
- $a_{17} = 25 \text{ m}, a_{22} = 20 \text{ m} \Rightarrow 25q^5 = 20 \text{ m} \Rightarrow q = 0.8^{0.2} \Rightarrow 1.503 \text{ m}$ (1 P.)
- e) (2 P.) Ein dritter Werfer wirft nach jedem Wurf um x m weniger weit. Wie weit hat er den 1. Wurf geworfen, wenn er im 20. Wurf 35 m weit und im 35. Wurf 30 m warf ?
- $a_{20} = 35 \text{ m}, a_{35} = 30 \text{ m} \Rightarrow 30 = 35 - 15d \Rightarrow 15d = 5 \Rightarrow d = 1/3 \text{ m}$ (1 P.)
 - $a_1 = 35 + 19 \cdot \frac{1}{3} = 41\frac{1}{3} \text{ m}$ (1 P.)
4. (11 P.) Gegeben ist ein Würfel mit Kantenlänge $k = 5 \text{ cm}$. Durch die beiden Eckpunkte $F(5|5|5)$ und $H(0|0|5)$ sowie durch den Kantenmittelpunkt $M_1(5|0|2.5)$ führe eine Ebene, welche ausschnittsweise hier dargestellt ist. Durch die Würfeckpunkte $C(0|5|0)$ und den Kantenmittelpunkt $M_2(2.5|0|5)$ führe ausserdem eine Gerade, welche die erwähnte Ebene in einem Punkt S durchstösst.
- a) (1 P.) Berechne die Fläche des Dreiecks M_1FH .
- $I_{\Delta} = \frac{|\vec{FH} \times \vec{FM}_1|}{2} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right|}{2} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 12.5 \\ -12.5 \\ 25 \end{pmatrix} \right|}{2} = \frac{30.62}{2} = \underline{15.31}$ (1 P.)
- b) (2 P.) Berechne den Winkel $\angle M_2CH$ (C ist Scheitel des Winkels, M_2 und H liegen auf den Schenkeln).
- $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{CM}_2 \cdot \vec{CH}|}{|\vec{CM}_2| |\vec{CH}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2.5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{56.25} \sqrt{50}} = \frac{50}{53.03} = 0.94 \Rightarrow \underline{\alpha = 19.47}$ (2 P.)

- c) (4 P.) Wie weit ist der Durchstosspunkt S vom Würfeckpunkt C entfernt (Angabe in cm, gerundet auf 2 Stellen nach dem Komma).

$$\bullet E_{M_1FH} : \vec{M}_E = \vec{FH} \times \vec{FM}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ -12.5 \\ 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow:$$

$$\mathbb{E} : x - y + 2z + d = 0$$

$$\bullet H = (0|0|5) : 2 \cdot 5 + d = 0 \Rightarrow d = -10$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} : x - y + 2z - 10 = 0 \quad (2 \text{ P.})$$

$$\bullet g_{CM_2} : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2.5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ P.})$$

- Schnittpunkt:

$$x - y + 2z - 10 = 0$$

$$x = 2.5t$$

$$y = 5 - 5t \Rightarrow \text{TR: } t = 0.86, x = 2.14, y = 0.71, z = 4.29$$

$$z = 5t$$

$$\bullet \Rightarrow D = (2.14|0.71|4.29) \quad (1 \text{ P.})$$

$$\bullet |\vec{DC}| = \left| \begin{pmatrix} -2.14 \\ 4.28 \\ -4.29 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{41.33} = \underline{\underline{6.43 \text{ cm}}}$$

- d) (4 P.) Wie gross ist der Abstand zwischen B und der Ebene \mathbb{F} , auf der die Punkte M_1, F und H liegen ?

$$\bullet \mathbb{F}_{M_1FH} : \vec{M}_{\mathbb{F}} = \vec{FM}_1 \times \vec{FH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.5 \\ 12.5 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \mathbb{F} : -12.5x + 12.5y - 25z + d = 0. H_{\mathbb{F}} : -62.5 - 62.5 + d = 0 \Rightarrow d = 125$$

$$\bullet \mathbb{F} : -12.5x + 12.5y - 25z + 125 = 0 \Rightarrow \mathbb{F} : -x + y - 2z + 10 = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{M}_{\mathbb{F}}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6} \quad (2 \text{ P.})$$

$$\bullet HNF - \mathbb{F} : \frac{-x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{2z}{\sqrt{6}} + \frac{10}{\sqrt{6}} = 0 \quad (1 \text{ P.})$$

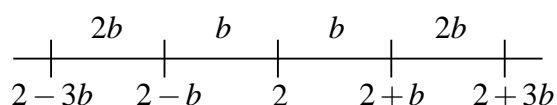
$$\bullet \text{ Abstand } B \text{ zu } \mathbb{F} : \left| \frac{-5}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{10}{\sqrt{6}} \right| = \underline{\underline{4.08}} \quad (1 \text{ P.})$$

5. (7 P.) Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = 4x - x^2$. In den Graphen werden drei Rechtecke folgendermassen einbeschrieben:

- alle Rechtecke sind gleich breit und liegen zwischen Graph und x -Achse.
- Das mittlere Rechteck hat zwei Eckpunkte auf dem Graphen, die beiden anderen je einen Eckpunkt.

Wie muss die Breite des Rechtecke gewählt werden, damit sie zusammen einen möglichst grossen Flächeninhalt einschliessen? Die Rechtecke befinden sich im ersten Quadranten, jeweils eine Seite liegt auf den Koordinatenachsen.

- Die Skizze sieht folgendermassen aus: (3 P.)



-

$$A = [-(2-3b)^2 + 4(2-3b)]2b + [-(2-b)^2 + 4(2-b)]2b + [-(2+3b)^2 + 4(2+3b)]2b = -2b(19b^2 - 12)$$

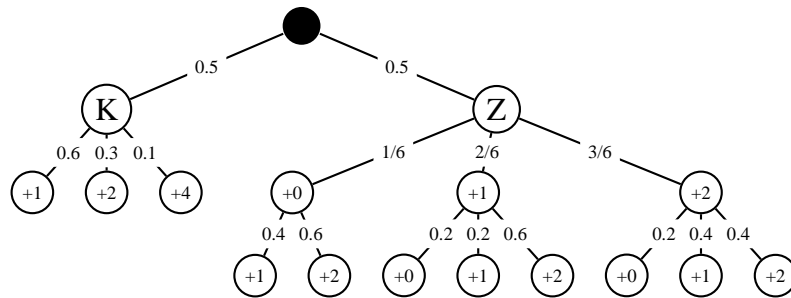
(2 P.)

- $A' = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{2\sqrt{19}}{19}, b_2 = -\frac{2\sqrt{19}}{19}$ (1 P.)
- $A''(b_1) < 0 \Rightarrow \text{Max. Die Breite beträgt } \frac{4\sqrt{19}}{19} \approx \underline{\underline{0.92}}$ (1 P.)

6. (8 P.) Bei einem Spiel wirfst Du zuerst eine ideale Münze. Erscheint Kopf, so wirfst Du ein kleines Schweinchen aus Kunststoff. Das Schwein landet mit 60% Wahrscheinlichkeit auf der Seite und Du gewinnst 1 Franken. Landet das Schwein auf den Beinen (Wahrscheinlichkeit 30%), so gewinnst Du 2 Franken und landet das Schwein auf dem Rüssel (Wahrscheinlichkeit 10%), so gewinnst Du sogar 4 Franken.

Erscheint jedoch Zahl, so ziehst Du hintereinander und ohne Zurücklegen zwei Zettel aus einem Sack. Im Sack befinden sich sechs Zettel, einer mit Ziffer 0, zwei mit Ziffer 1 und drei mit der Ziffer 2 darauf. Du verlierst nun so viele Franken, wie das Produkt der beiden Ziffern beträgt.

- Der Baum sieht folgendermassen aus: (2 P.)



- Mit dem Baum können wir berechnen: (2 P.)

X	+1	+2	+4	0	-1	-2	-4
$P(X)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Du einen Verlust beim Spiel machst?

- $\frac{1}{30} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{3}$ (1 P.)

- b) Wie viel wirst Du im Durchschnitt beim Spiel verlieren oder gewinnen, wenn Du sehr häufig spielst?

- $E(X) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{30} - \frac{2}{5} - \frac{4}{10} = -\frac{1}{30} = \underline{\underline{-0.033\text{Fr.}}}$ (1 P.)

- c) Die Münze soll so gezinkt werden, dass das Spiel fair wird (d.h. der Erwartungswert soll 0 sein). Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Münze Kopf zeigen?

- $0 = x \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \right) + (1-x) \left(-\frac{1}{15} - \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \right) \Rightarrow x = 0.51 \Rightarrow$
P(Kopf)=0.51, P(Zahl)=0.49 (2 P.)