Klausur Nummer 4 — 4cN , Gruppe A, 31.1.2004

Name:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte								

Summe: Note:

Insgesamt gibt es 25 Punkte.

Aufgabe 1: (2 Punkte) f ist eine lineare Abbildung. Der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ wird dabei auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ abgebildet, der Vektor $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Wie lautet die Matrix von f?

Bestimme auch die Matrix der Umkehrabbildung.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Eine Matrix hat den Eigenwert 2 mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und den Eigenwert -3 mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wie lautet die Matrix?

Aufgabe 3: (3 Punkte) Die Gerade $y = -3x + 4$ wird um den Ursprung um $30°$ gedreht. Wie lautet die Gleichung der Bildgeraden?

Aufgabe 4: (3 Punkte) Z ist die zentrische Streckung am Ursprung mit dem Faktor 42. Weiterhin ist S die Spiegelung an der Geraden durch die Punkte $(2|4)$ und $(5|8)$. Bestimme die Matrix von $S \circ Z$.

Aufgabe 5: (3 Punkte) D ist die Drehung um den Ursprung um 42 Grad, S ist die Spiegelung an der Geraden $y = 10,5x$. Wie lautet die Matrix von $D \circ S$?

Was für ein Typ von Kongruenzabbildung ist $D \circ S$?

Aufgabe 6: (5 Punkte) Punkte gibt es auf den ohne TI89 nötigen Rechenweg. Teil b und c lassen sich auch durch Nachdenken lösen. Punkte gibt es dann für die Begründung.

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix.

b) Bestimme die Determinante von $A^{10} = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot$

c) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^{10}.

Aufgabe 7: (5 Punkte) Die Abbildung f_1 ist gegeben durch die Spiegelung an der Geraden $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, die Abbildung f_2 ist die Spiegelung an $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Stelle f_1 und f_2 in der Form $f_1(\vec{x}) = A_1\vec{x} + \vec{c_1}$ bzw $f_2(\vec{x}) = A_2\vec{x} + \vec{c_2}$ dar. Dabei sind A_1 und A_2 Matrizen und $\vec{c_1}$ und $\vec{c_2}$ Vektoren.

b) Stelle $h = f_1 \circ f_2$ in der Form $h(\vec{x}) = A_3\vec{x} + \vec{c_3}$ dar.

c) Was für ein Typ von Kongruenzabbildung ist h?

Aufgabe 8: (2 Punkte) f ist eine lineare Abbildung. Die zu f gehörige Matrix hat die Determinante 2. Wie gross ist die Fläche des Bildes des Rechtecks mit den Eckpunkten $(0|0)$, $(2|0)$, $(2|4)$ und $(0|4)$.

Lösungen 1) $A == \begin{pmatrix} -2 & 9/2 \\ -13/2 & 23/2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 46/25 & -18/25 \\ 26/25 & -8/25 \end{pmatrix}$..

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3) viele Lösungen möglich, z.B. $\begin{pmatrix} (\sqrt{3}-1)/2 \\ (\sqrt{3}+1)/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} (\sqrt{3}+3)/2 \\ (1-3\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} -11.76 & 40.32 \\ -40.32 & 11.76 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} -0.86 & -0.52 \\ -0.52 & 0.86 \end{pmatrix}$

6) a) Eigenwert 5 mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und -2 mit $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) 10^{10}

c) Eigenwert 5^{10} mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $(-2)^{10}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

7) $f_1(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{pmatrix} \overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$f_2(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

8) 16