Klausur Nummer 7 **4bN , Gruppe A, 25.5.2007**

Name:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte						

Summe: Note:

Insgesamt gibt es 31 Punkte. $j_{n,x_0}(f)$ bezeichnet das Taylorpolynom n-ter Ordnung von f an der Stelle x_0.

Aufgabe 1: (6 Punkte) Bestimme die folgenden Taylorpolynome. Findest Du einen Lösungsweg, ohne Ableitungen bestimmen zu müssen, so gib an, warum Du so zur Lösung kommst.

a) $j_{2,\pi}(\sin x \cdot \cos x)$

b) $j_{\infty,0}\left(\frac{1}{1-4x}\right)$

c) $j_{5,0}\left(3x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 4x + 3\right)$.

Aufgabe 2: (5 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \cos x$. Es soll eine Näherung für ein lokales Maximum dieser Funktion gefunden werden.

a) Berechne $j_{2,0}(f)$.

b) Bestimme das Maximum von $j_{2,0}(f)$.

Aufgabe 3: (2 Punkte) Betrachte $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Wie lautet $j_{7,0}(f)$? (Keine Rechnung erforderlich). Wie lässt sich dem Taylorpolynom ansehen, dass es keine gute Näherung für $x > 1$ sein kann?

Aufgabe 4: (5 Punkte) Betrachtet wird $f(x) = e^{(x^2)}$. Bestimme $j_{2,1}(f)$ und führe eine Fehlerabschätzung für dieses Taylorpolynom im Intervall $[0,1]$ durch.

Aufgabe 5: (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 6}{x+1}$

a) Bestimme die Tangente an f für $x = 2$.

b) Bestimme das Taylorpolynom zweiter Ordnung für $x = 0$.

c) Wie lässt sich die lineare Funktion bestimmen, die f für grosse x annähert (Hier sind Worte gefragt, nicht die technische Durchführung)? Was ist der Name für solche Näherungsfunktionen? Bestimme diese Näherungsfunktion.

Aufgabe 6: (7 Punkte) Gegeben ist $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.

a) Bestimme durch 2 Schritte des Newtonverfahrens eine Näherung für eine Nullstelle. Startwert $x_0 = 1.5$.

b) Bestimme durch 2 Schritte des Sekantenverfahrens eine Näherung für eine Nullstelle. Startwerte $x_0 = 0.5$ und $x_1 = 2$.

c) Bestimme mit einer altbekannten Methode alle Nullstellen genau.

Lösungen: 1a) $x - \pi$ b) $\sum_{k=0}^{\infty}(4x)^k$ c) $3x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) \to 0$; $f'(x) \to 1$; $f''(x) \to 0$

3) $j_{7.0}(x) = \sum_{K0=}^{7} x^k$ Für $x > 1$ wird $f(x)$ negativ, nahe Null. Das Taylorpolynom wächst aber sehr schnell, ist positiv.

4) $j_{2,1}(f) = \mathrm{e} \cdot (1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2)$. Der Fehler ist kleiner als $\frac{10\mathrm{e}}{3}(x-1)^3$

5) a) $17.8x + 5.1$ b) $6 + 2x^2$ c) Polynomdivision liefert die Asymptote $2x + 4$

6c) Faktorzerlegung $x(x-3)(x-1)$ liefert die Nullstellen 0, 3 und 1