

Name:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte						

Summe:

Note:

Insgesamt gibt es 36 Punkte.

**Aufgabe 1:** (8 Punkte) Welche der folgenden Funktionen haben lineare Funktionen als Asymptoten? Gebe, falls sie existieren, die Asymptoten an.

a)  $f : x \mapsto \frac{x+1}{-x^3-1}$

b)  $g : x \mapsto \frac{-x^3+1}{x+1}$

c)  $h : x \mapsto \frac{x^2+4x-1}{x+12}$

d)  $i : x \mapsto \frac{x+\sin x}{x^3}$  (Hier muss die Antwort begründet werden.)

**Aufgabe 2:** (6 Punkte) An welchen Stellen hat die folgende Funktion Definitionslücken? Sage jeweils, ob sie dort

- stetig fortsetzbar ist,
- einen Pol mit Vorzeichenwechsel oder
- einen Pol ohne Vorzeichenwechsel hat.

$$f : x \mapsto \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)^2(x+4)^2}$$

**Aufgabe 3:** (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{(x-1)^m(x+2)}{(x-1)^n}$$

Dabei sind  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen.

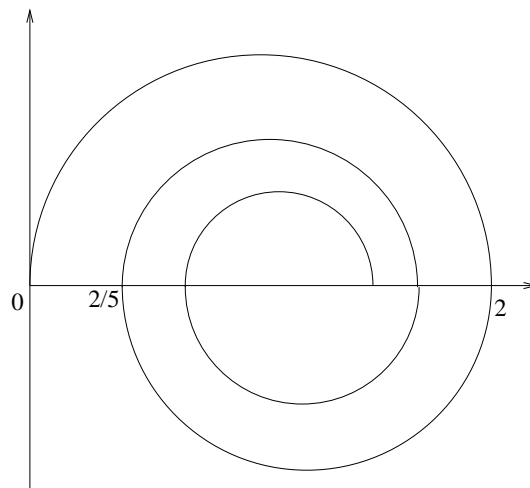
- a) Gebe jeweils ein Beispiel für die Zahlen  $m$  und  $n$  so dass die Funktion bei  $x = 1$
- stetig fortsetzbar ist,
  - einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat,
  - einen Pol ohne Vorzeichenwechsel hat.
- b) Allgemein: Welche Bedingungen müssen an  $m$  und  $n$  gestellt werden, damit die Funktion bei  $x = 1$
- stetig fortsetzbar ist
  - einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat,
  - einen Pol ohne Vorzeichenwechsel hat.

**Aufgabe 4:** (3 Punkte) Finde zwei Polynome  $p(x)$  und  $q(x)$ , die jeweils einen Grad grösser oder gleich 1 haben, so dass gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 3$$

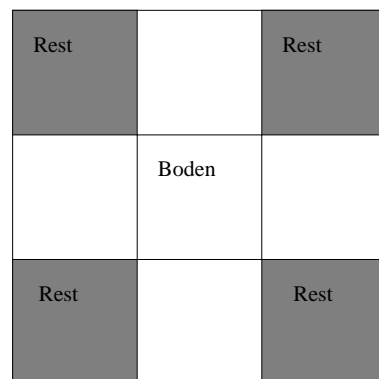
Tipp: Bei dieser Aufgabe gibt es sehr viel Freiheit mit der Antwort.

**Aufgabe 5:** (8 Punkte) In der Figur schneidet der erste Halbkreis die  $x$ -Achse bei der Stelle 2, der zweite Halbkreis schneidet bei  $\frac{2}{5}$ . Die Halbkreise bilden eine unendliche geometrische Folge.



- Bestimme  $q$  und berechne die Länge der Spirale.
- Berechne die Koordinaten des Punktes  $Z$ , der der Grenzwert der Folge der Endpunkte der Halbkreise ist.
- Wieviele Halbkreise müssen *aussen* mindestens noch angesetzt werden, damit die ganze Spirale mindestens eine Länge von 200 hat?

**Aufgabe 6:** (5 Punkte) Ein Quadrat hat die Seitenlänge 27cm. Aus diesem Quadrat sollen offene Schachteln mit quadratischer Grundfläche und quadratischen Seitenwänden geschnitten werden. Ist die erste Schachtel hergestellt, so bleiben 4 quadratische Reststücke übrig. Aus diesen werden wieder vier Schachteln gebastelt, ebenso aus den dann anfallenden Reststücken. Welchen Rauminhalt hätten alle Schachteln zusammen, wenn das Verfahren immer so weitergeführt werden könnte?



**Aufgabe 7:** *Zusatzaufgabe – strenger Bewertungsmaasssstab* (4 Punkte) Betrachte die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{3x^3 + 8x^2 + 7x + 2}{3x + 2}.$$

- a)  $x_0$  ist die Definitionslücke. Finde eine Zahl  $\delta$ , so dass für  $|x - x_0| < \delta$  gilt

$$\left| f(x) - \frac{1}{9} \right| < 0,01.$$

- b) Allgemein:  $x_0$  ist die Definitionslücke und  $\epsilon$  ist irgendeine gegebene positive Zahl. Wie muss eine Zahl  $\delta$  gewählt werden, so dass für  $|x - x_0| < \delta$  gilt

$$\left| f(x) - \frac{1}{9} \right| < \epsilon.$$