Prüfung Modellieren 3h, 28.10.2020

Name:

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte				

Summe: Note:

Für eine 6 müssen 3 Aufgaben vollständig korrekt bearbeitet werden.

Die Formelsammlung und der Taschenrechner TI30X Pro sind zugelassen.

1. Ein Wasserspeicher

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(x-2)(x-5)$. Die Funktion wird zwischen $x = 0$ und $x = 6$ betrachtet.

a) Skizzieren Sie f und schreiben Sie einen kurzen Text, in in welchem f die Zuflussrate in einem Wasserspeicher beschreibt. Wählen Sie jeweils sinnvolle Einheiten.

b) Wie viel Wasser muss zu Beginn im Wasserspeicher mindestens sein? Wie viel Platz muss dann noch im Speicher sein, damit alles Wasser aufgenommen wird?

c) Geben Sie eine Funktionsgleichung an für $I_0(x) = \int_0^x f(t)dt$

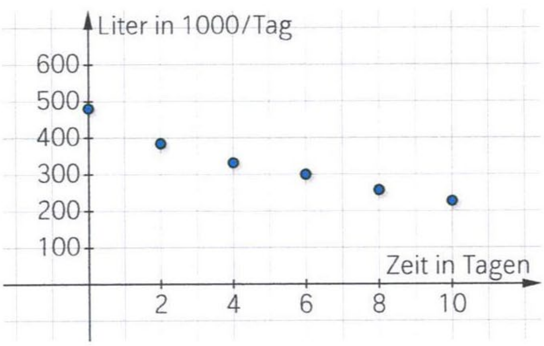
Sollten Sie bei c) keine Antwort finden, dürfen Sie mit $I_0(x) = 0.2x^4 - 1.2x^3 + 1.5x^2$arbeiten

d) $I_0(x)$ hat eine weitere Nullstelle zwischen $0 < x < 3$. Finden Sie diese Nullstelle möglichst genau. Welche Bedeutung hat die Nullstelle im Zusammenhang mit dem Wasserspeicher?

e) Finden Sie eine Stammfunktion zu f, so dass sich bei $x = 3$ noch 20 Volumeneinheiten im Speicher befinden.

2. Wegen mangelnder Regengüsse versiegt eine Quelle. Die Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser an verschiedenen Tagen aus der Quelle sprudelt, lassen sich der Tabelle und der Grafik entnehmen.
Wie viel Wasser liefert die Quelle in den ersten acht Tagen?

Wie viel Wasser fliesst noch bis zum Versiegen?



Tage	l in 1000/Tag
0	480
2	385
4	335
6	305
8	260
10	230

BITTE WENDEN!

3. Die Förderrate einer Gasquelle nimmt zunächst stark zu und dann mit der Zeit wegen des nachlassenden Gasdrucks wieder ab. Sie wird mit $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ modelliert.

a) Ermitteln Sie die Gasmenge, die die Quelle in den ersten 12 Jahren liefert.

b) Eine andere Gasquelle wird mit $h(x) = \frac{1}{x^2}$ modelliert, wobei die Förderung erst bei $x = 1$ startet. Wie viel Gas liefert diese Quelle in 12 Jahren? Wie viel liefert sie insgesamt? (Schätzen Sie ab und begründen Sie Ihre Schätzung)

4. Eine Krankheit verbreitet sich. Bis zum 8.10.2020 gibt es 100'000 Erkrankte. Es wird gemessen, wie viele Erkrankte in den letzten 24 Stunden hinzugekommen sind. Hier ist die Tabelle, die die Fallzahlen jeweils an Donnerstagen beschreibt. Die anderen Wochentage fehlen.

Datum	8.10.	15.10.	22.10.	29.10.
Fälle	1172	2613	5256	9386

Wie viele Erkrankte hat es bis zum 29.10. gegeben?

Lösaungsideen

1

a) Nullstellen 0, 2 und 5. Zwischen linken Nullstellen ein Maximum, zwischen rechten ein Minimum. Auf der x-Achse eine Zeiteinheit. Auf de y-Achse Volumen pro Zeiteinheit.

Zuerst kein Zufluss, steigender Zufluss bis ca 1, dann wieder sinkender Zufluss. Kein Zufluss bei 2, zunehmende Abfluss bis ca 3.5, dann abnehmender Abfluss. Bei 5 wieder Stillstand. Einheiten müssen zur Geschichte passen.

b) Integral von 0 bis 5 berechnen → -10.4, also 10.4 Volumeneinheiten.

c) $I_0(x)$=0.25x^4-7/3x^3+5x^2

d) Nullstelle bei 10/3. Dann ist wieder so viel Wasser im Speicher wie zu Beginn.

e) F(x)= 0.25x^4-7/3x^3+5x^2+17.75

2 Beispielsweise mit Regression eine Geradengleichung finden und integrieren. Oder Datenpunkte mit Strecken verbinden und dazwischen integrieren. Oder Funktion streckenweise konstant wählen. Also von 0 bis 1, 1 bis 3, 3 bis 5 jeweils Konstante Funktionen integrieren.

3

a) Von 0 bis 12 integrieren

b) Von 1 bis 12 integrieren. Für die Schätzung (uneigentliches Integral noch nicht gemacht) hohe Zahlen einsetzen und bemerken, dass sich die Zahl stabilisiert.

4 Zunächst einmal: Daten nicht als Kommazahlen auffassen. Dann wieder wie bei 2 Datenpunkte verbinden oder mit exponentieller Regression.

Lösungen Prüfungen Modellieren, 3h, Oktober 2021

Aufgabe 1 a) Zu Beginn ist der Wasserzufluss Null, er steigt dann bis x=1 immer stärker an. Die grösste Zuflussgeschwindigkeit ist bei x=1. Danach nimmt die Zuflussgeschwindigkeit ab, und ist Null bei x=2. Dann fliesst Wasser mit zunehmender Geschwindigkeit ab, bis zum Wert -8. Danach verlangsamt sich der Abfluss und bei x=5 beginnt ein immer schneller werdender Zufluss. (1.5 Punkte)

Einheiten auf den Achsen zum Beispiel: x-Achse Zeit in Minuten, y-Achse Zufluss in Liter pro Minute (1 Punkt); Graph: 1.5 Punkte

b) Am wenigsten Wasser ist bei t=5 im Speicher. Das Integral der Funktion von 0 bis 5 ist -10.4. Es müssen 10.4 Liter im Speicher sein. (1.5 Punkte) Der Speicher muss das in den ersten zwei Minuten zufliessende Wasser aufnehmen (Integral von 0 bis 2 ist 5.33). Also müssen noch 5.33 Liter Platz sein. (1 Punkt)

c) $f(x) = x(x-2)(x-5) = x(x^2-7x+10) = x^3-7x^2+10x$. (1 Punkt) Das lässt sich problemlos integrierten. Die Stammfunktion ist $I_0(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2$. (1 Punkt) Die Konstante ist $c = 0$, da der Wert zu Beginn Null sein muss. (1 Punkt für die Begründung)

d) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 = x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{3}x + 5\right)$. Das x^2 ist für die Nullstelle bei 0 zuständig. Wir müssen die Nullstellen des quadratischen Terms danach finden (1 Punkt) . Poly-solv oder die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefern die positive Lösung $\frac{10}{3}$ (0.5 Punkt). Zu diesem Zeitpunkt ist genauso viel Wasser abgeflossen wie zugeflossen. (0.5 Punkt). Das liegt aber nicht zwischen Null und drei. Die Aufgabe ist also nicht korrekt (1 Punkt)

Wird genauso mit der gegebenen Funktion gearbeitet, so gibt es zum Zeitpunkt $x = 1.78$ gleich viel Wasser wie zu Beginn. (2 Punkte)

Alternativ kann auch mit der Wertetabelle gearbeitet werden. Je nach Genauigkeit gibt das auch bis zu drei Punkten.

e) Das Integral von 0 bis 3 ist 2.25. Damit wir bei 3 den Wert 20 haben , ist die Stammfunktion

$I_0(x) + 17.75$ (1.5)

Mit der Ersatzfunktion ergeben sich 22.7 Liter. (1.5 Punkte)

Aufgabe 2 Regressionsgerade

a) y=-25.64x+451 (3 Punkte mit TR, 2 Punkte per Hand, 1.5 Punkte Sekante durch ersten und letzten Punkt, 1 Punkt für zwei benachbarte Punkte)

Integrieren von 0 bis 8 gibt circa 2800, Also 2.6 Millionen Liter. (1 Punkt)

Zweiter Weg mit verschiedenen Flächenaufteilungen: 3 Punkte

b) Gerade aus a verwenden oder Gerade in Graphik ziehen. Versiegen bei x=18 (2 Punkte)

Wassermenge bis dorthin zum Beispiel als Fläche eines rechtwinkligen Drreiecks. Etwa 4 Millionen Liter von Tag 0 an.

Aufgabe 3 a) $\int_0^{12} \frac{4x}{x^2+1} dx = 9.95$. Also etwa 10 Millionen Kubikmeter. (2 Punkte)

b) Das Integral von 1 bis 13 liefert 0.92 (1 Punkt),
von 1 bis 100 0.99, von 1 bis 1000 0.999 und bis 100000 0.99999. (1 Punkt)
Es werden nicht mehr als 1 Millionen Tonnen. (1 Punkt)
Das lässt sich auch rechnerisch begründen:

$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}|_1^t = -\frac{1}{t} + 1$ (1 Punkt)
Wenn t immer grösser wird, nähert sich das immer mehr der 1 an. (2 Punkte)

Aufg 4: Die Funktion $f(x) = 2600 \cdot 2^{x/7}$ modelliert den Anstieg recht gut. Dabei ist x die Zeit seit dem 15.10. Die Integration beginnt also bei x=-7 (3 Punkte)

Wir rechnen (und runden auf 1000er) $100000 + \int_{-7}^{14} 2600 \cdot 2^{x/7} dx = 192000$. Die Zahl der Erkrankten hat sich also fast verdoppelt. (1 Punkt)

Zweiter Lösungsweg: Wir rechnen mit Mittelwerten der Woche:

100000+7*(1172+2613)/2+7*(2613+5256)/2+7*(5256+9386)/2=192000. (3 Punkte)