Test 3 F1b, 23.2.22

Name:

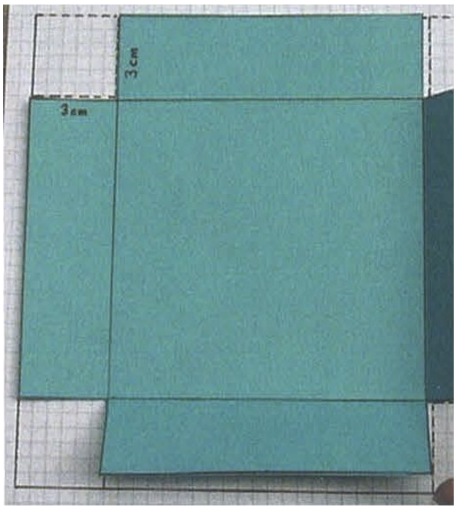
Aufgabe	1	2	3	4	5
Punkte					

Summe: Note:

Insgesamt gibt es 22 Punkte.

Die Formelsammlung und der Taschenrechner TI30X Pro sind zugelassen.

1. Eine Kiste mit quadratischer Grundfläche soll aus einem quadratischen Stück Papier mit Seitenlänge 17cm hergestellt werden. Dazu wird an jeder Ecke ein Quadrat abgeschnitten. Die Ränder des verbleibenden Papierstücks werden hochgefaltet. Im Bild rechts haben die abgeschnittenen Quadrate eine Seitenlänge von 3cm.



Wie gross muss die Seitenlänge der abgeschnittenen Quadrate gewählt werden, damit die Kiste ein möglichst grosses Volumen hat?

2. Finden Sie Zahlen, deren Summe 20 ist, und deren Produkt möglichst gross ist. Begründen Sie nach Möglichkeit, warum ihre Zahlen tatsächlich das grösstmögliche Produkt ergeben.

a) Ohne Einschränkungen

b) Mit natürlichen Zahlen als Summanden

c) Mit positiven rationalen Zahlen als Summanden

d) Mit nur 2 Summanden.

BITTE WENDEN!

3. In einem Stausee befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel befindet sich auf 1500m über Normal Null – das kann für die Untersuchung gerne als Null betrachtet werden.

Nun wird Wasser in den Stausee gefüllt, bis zum Zeitpunkt t=1 (Tag). Der Seespiegel ist dabei um 2.5m gestiegen. Dann wird Wasser wieder abgelassen.

Beim Zeitpunkt t=2 ist die Ausgangshöhe des Wasserspiegels wieder erreicht.
Es wird aber weiter Wasser abgelassen bis zum Zeitpunkt t=4.5. Der Wasserspiegel liegt nun 8.5m unter der Ausgangshöhe.
Dann wird wieder Wasser eingefüllt. Bei t=6 ist die Ausgangshöhe wieder erreicht.

a) Skizzieren Sie den Vorgang.

b) Versuchen Sie, den Vorgang nun mit einem Polynom 3. Grades zu modellieren, also

$$f(t) = at^3 + \ldots$$

c) Sie haben mehr Angaben erhalten, als für die Modellierung notwendig sind. (Funktionswerte, Angaben über die Ableitung….) – passen auch die Angaben, die Sie für die Modellierung nicht verwendet haben, zu ihrer Funktion?

Lösungen:

1)Wertetabelle, Zeichnung, Lösung ablesen ist ok und gibt Punkte. Mit Differentialrechnung:

Volumenfunktion ist $f(x) = 4x^3 - 68x^2 + 289\,x$ Ableiten $f'(x) = 12x^2 - 128x + 289 = 0$, also bei 7.42 oder 3.25cm. Einsatz der 2. Ableitung, oder Graph: Maximum bei 3.25.

2)a) unendlich gross: 2 negative und 1 positive Zahlen wählen, deren Summe 20 ist.
b) Wichtig ist das Versuchen mehrerer Summanden. Mit sechs 3 und einer 2 gibt es das höchste Produkt. (Begründung ist schwierig. Ein erster Ansatz: im Produkt kommt keine 5 als Faktor vor: die könnte bei gleicher Summe durch 2 und 3 ersetzt werden und das gäbe ein höheres Produkt. Usw.
c) Idee: Alle Faktoren sollten gleich hoch sein. Das gibt mit Ausprobieren 20/6. Das ist aber nur ein Analogieschluss aus 2 Dimensionen und noch kein Beweis.

d) 10 und 10. Funktion finden, ableiten, Null setzen.

3) Es gibt 5 Bedingungen für die Funktionswerte, davon 3 Nullstellen. Ausserdem zwei Bedingungen an die Ableitung. Für das Aufstellen der Funktion braucht es nur 4 Bedingungen. Dann muss geprüft werden, ob die anderen Bedingungen näherungsweise eingehalten werden.

Sinnvolles Vorgehen, Ansatz mit den drei Nullstellen $f(x) = ax(x-2)(x-6)$. Zu bestimmen ist noch a. Einsetzen von $f(1) = 2.5 = a \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-5)$ gibt a=2.5.

Kontrollieren der anderen Bedingungen mit dieser Funktion zeigt, dass es näherungsweise passt.

Alternativ können auch die beiden Nullstellen der 1. Ableitung genommen werden, mit einer quadratischen Funktion anzusetzen $g(x) = a(x-1)(x-4.5)$. Diese wird integriert (bei t=0 ist die Funktion Null). Mit t=1 kann dann wieder a bestimmt werden.