Test Nummer 4 — 4h, 10.02.2022

Name:

Aufgabe	1	2	3	4	5
Punkte					

Summe: Note:

Insgesamt gibt es 23 Punkte.

Die Formelsammlung und der Taschenrechner TI30X Pro sind zugelassen.

Aufgabe 1 **(14=5+3+3+1+2 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$

a) Ermitteln Sie die Punkte auf dem Graphen von

b) Der Graph von f und die x-Achse begrenzen ein Gebiet. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

c) Der Punkt P hat die x-Koordinate 6 und liegt auf dem Graphen von f . Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten und der Normalen zum Graphen von f in P.

Wir betrachten nun zusätzlich die Funktion $g(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{19}{4}$.

d) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

e) Die vertikale Gerade mit der Gleichung $x = a$ schneidet die beiden Graphen in den Punkten R und S. Wie muss a gewählt werden, so dass die zugehörigen Tangenten an die Graphen in diesen Punkten R und S parallel sind?

BITTE WENDEN!

Aufgabe 2 Leiten Sie die Funktion ab. **(3=1.5+1.5 Punkte)**

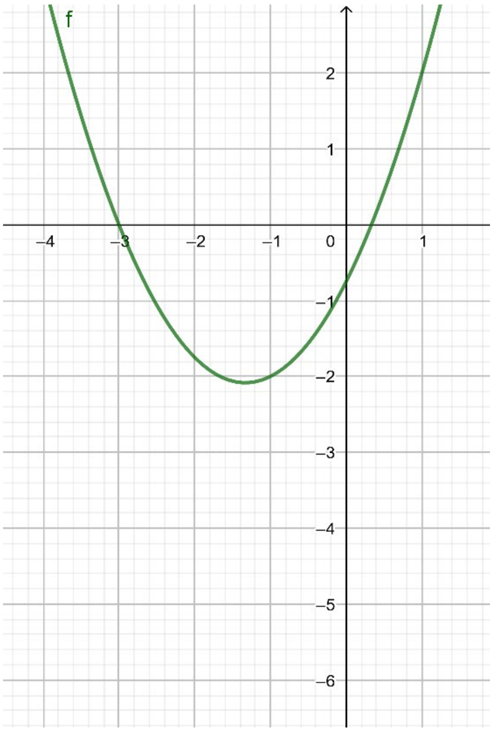
a) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot sin(2x)$

b) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Tangente an der Stelle $x = 2$ exakt. **(2 Punkte)**

$$f(x) = (3x - 1)e^{2x-1}$$

Aufgabe 4 Bestimmten Sie die Tangente an die Kurve für $x = 1$ **(2 Punkte)**



Aufgabe 5 Finden Sie eine Stammfunktion **(2 Punkte)**

a) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

b) $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + 2)$

Lösungen:

a)

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+4 \qquad \boxed{\text{0.5P}}\; f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x \qquad \boxed{\text{0.5P}}\; f''(x)=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{0.5P}}\; x_1=0 \;,\; \boxed{\text{0.5P}}\; x_2=4$$

$$f''(0)<0 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{0.5P}}\;\boxed{\text{0.5P}}\; HP(0\,|\,4) \qquad f''(4)>0 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{0.5P}}\;\boxed{\text{0.5P}}\; TP(4\,|\,0)$$

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{4}x=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{0.5P}}\; x=2 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{0.5P}}\; WP(2\,|\,2)$$

b) Nullstellen bei $x=-2$ und bei $\boxed{\text{0.5P}}$ $x=4$

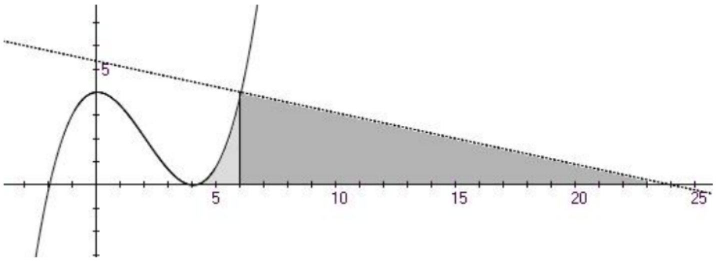
$$A=\int_{-2}^{4}\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+4\,dx \;\boxed{\text{0.5P}}\; =\frac{1}{8}\cdot\int_{-2}^{4}x^3-6x^2+32\,dx=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+32x\right]_{-2}^{4} \;\boxed{\text{0.5P}}\; =\frac{1}{8}\cdot\big(64-(-44)\big)=13.5 \;\boxed{\text{0.5P}}$$

c) $f(6)=4 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{0.5P}}\; P(6\,|\,4)$ $\qquad f'(6)=\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{0.5P}}\; m=-\frac{2}{9}$

Kurvennormale: $y = -\frac{2}{9}x + q$ $\boxed{0.5P}$ $\qquad P(6|4) \Rightarrow 4 = \frac{-12}{9} + q \Rightarrow q = \frac{16}{3}$ $\boxed{0.5P}$

Also: $y = -\frac{2}{9}x + \frac{16}{3}$

d)



Schnittpunkt mit y-Achse: $\qquad 0 = -\frac{2}{9}x + \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{2}{9}x = \frac{16}{3} \Rightarrow x = 24$ $\boxed{0.5P}$

$$A_1 = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 32x\right]_4^6 = \frac{1}{8} \cdot (84 - 64) = \frac{5}{2} \quad \boxed{1P}$$

$$A_2 = \frac{(24-6) \cdot 4}{2} = 36 \quad \boxed{1P} \qquad \Rightarrow \quad A_{total} = 38.5 \quad \boxed{0.5P}$$

e)

$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{19}{4} \quad \boxed{0.5P} \quad \Rightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 32 = x^3 - 7x^2 - x + 38$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3\,,\, x_2 = 2 \quad \boxed{1P}$$

$$\Rightarrow \quad S_1(-3|-6.125) \quad S_2(2|2) \quad \boxed{0.5P}$$

f)

$$g(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{19}{4} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{1}{8} \quad \boxed{0.5P}$$

$$f'(a) = g'(a) \quad \boxed{0.5P} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{8}a^2 - \frac{3}{2}a = \frac{3}{8}a^2 - \frac{7}{4}a - \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad 3a^2 - 12a = 3a^2 - 14a - 1 \quad \boxed{0.5P} \quad \Rightarrow \quad 2a = -1$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2} \quad \boxed{0.5P}$$

2) a) $f'(x) = (2x^2 + 2)\,cos(2x) + 2x\,sin(2x)$ $\qquad$ b) $f'(x) = (1 - \mathrm{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$

3) $f'(x) = (6x + 1)e^{2x-1}$; $f'(2) = 13e^3$; $f(2) = 5e^3$; $y = 13e^3(x - 2) + 5e^3 = 13e^3x - 21e^3$

4) $y = 3x - 1 = 3(x - 1) + 2$

5) a) $F(x) = \frac{5}{7}x^{1.4}$ $\qquad$ b) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + 0.5x^4$