M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Wahrscheinlichkeit

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

6. Juli 2022

17 Wahrscheinlichkeit

Dieses Kapitel verdanke ich zu grossen Teilen Martin Münch.

17.1 Statistik und Wahrscheinlichkeit

Auftrag 17.1: Wiederholung relative Häufigkeit

1. Im letzten Winter fehlten in der Klasse F1a 6 von 23 Schüler*innen, in der Klasse F2b 4 von 15 Schüler*innen und Schülern und in der Klasse F3c 4 von 19 Schüler*innenn. Stellen Sie fest, in welcher Klasse der grösstee Teil erkrankte.

2. Bei einer Verkehrskontrolle fuhren 34 Autos mit korrektem Tempo, 18 Autos fuhren bis 10 km/h, 12 Autos bis 20 km/h und 4 Autos mehr als 30 km/h zu schnell. Berechnen Sie die relative Häufigkeit für die einzelnen Geschwindigkeitsübertretungen.

3. Was bedeutet es für eine Stadt mit 23'432 Einwohnern, wenn die relative Häufigkeit der Hundebesitzer mit 0.04 angegeben wird?

4. In einer Stadt wohnen 34 891 Personen. Es sind dort 17 345 Personenwagen, 456 Lastwagen, 121 Busse und 1567 Motorräder angemeldet. Berechnen Sie die relative Häufigkeit, bezogen auf die Anzahl Personen.

Beim Kapitel Statistik ging es um die Zusammenfassung und Darstellung von Daten. Dabei werden Daten dargestellt, die bereits empirisch erhoben worden sind: wie viele Schweizerinnen und Schweizer erkrankten 2004 an den Masern, wie viele Männer und Frauen gehen in die Klasse F3d?

Beim Kapitel Wahrscheinlichkeit geht es um die Prognose. Wie oft wird voraussichtlich beim 100-fachen Würfeln die 5 erscheinen? Wie viele Frauen werden im nächsten Studienjahr in Basel ein Studium zur Primarschullehrkraft beginnen? Wahrscheinlichkeiten lassen sich empirisch schätzen und auch theoretisch bilden.

Auftrag 17.2

Würfeln Sie 100 Mal.

a) Wie gross ist die relative Häufigkeit der 5? (Erinnerung: relative Häufigkeit bedeutet hier, die Anzahl der fünfer durch die Gesamtzahl der Würfe zu teilen.)

b) Hat jemand in der Klasse eine auffällige Anzahl von 5en?

c) Was ist denn unauffällig?

d) Arbeiten Sie zu viert zusammen und bestimmen Sie die relative Häufigkeit der 5en.

e) Bestimmen Sie die relative Häufigkeit der 5en für die Klasse.

f) https://www.geogebra.org/m/rCgE6wTz

g) Nehmen Sie an, Sie würden 10 000 Mal würfeln. In welchem Bereich sollte dann die relative Häufigkeit liegen?

Auftrag 17.3

Beim Wurf von zwei nicht unterscheidbaren Würfeln gibt es 21 mögliche Zahlenkombinationen:

6 - 6	5 - 5	4 - 4	3 - 3	2 - 2	1 - 1
6 - 5	5 - 5	4 - 3	3 - 2	2 - 1	
6 - 4	5 - 3	4 - 2	3 - 1		
6 - 3	5 - 2	4 - 1			
6 - 2	5 - 1				
6 - 1					

Mario vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch (zwei Mal die gleiche Augenzahl) $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ beträgt. Überprüfen Sie dies in der Klasse: Jede Zweiergruppe würfelt 40 Mal. Gezählt wird in jeder Gruppe, wie oft ein Pasch auftritt.

Definition 17.1: Zufallsexperiment

Unter einem Zufallsexperiment wird ein (zumindest theoretisch) beliebig oft wiederholbarer Vorgang verstanden, dessen Ausgang sich *nicht* mit Sicherheit vorhersagen lässt.

Beispiel 17.1

Ein Spielwürfel wird geworfen, Auftrag 17.2.

Bei der Statistik geht es also um empirische, real durchgeführte, Zufallsexperimente. Bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es um theoretische Zufallsexperimente.

Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit in diesem Zufallsexperiment stehen damit zwei prinzipiell verschiedene Wege zur Verfügung: durch Versuche und durch theoretische Überlegungen.

Definition 17.2

Empirische Wahrscheinlichkeit: Die empirische Wahrscheinlichkeit ist ein Schätzwert der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis eintritt. Dieser basiert auf der Häufigkeit, mit der das Ereignis bei einer häufigen Wiederholung des Zufallsexperiments auftritt.

Eine empirische Wahrscheinlichkeit lässt sich ermitteln durch tatsächliche Durchführung des Experiments, oder aber auch durch Simulation am Computer. Wir benutzen dabei den folgenden Zusammenhang, der sich bei allen Zufallsexperimenten bestätigt:

Satz 17.1: Empirisches Gesetz der grossen Zahlen

Wird ein Zufallsxperiment sehr oft durchgeführt, so stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse.

Diese „stabilisierte" relative Häufigkeit ist das, was wir für Prognosen als empirische Wahrscheinlichkeit verwenden. Die Wahrscheinlichkeit lässt sich empirisch also nur näherungsweise feststellen.

Beispiel 17.2

Bei 1000 zufällig ausgewählten Personen geben 94 an, die Partei XYZ zu wählen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Person XYZ wählt, wird damit als 0.094=9.4% angenommen.

In der fortgeschrittenen Statistik gibt es dann die Konfidenzintervalle. Das ist das Intervall, in dem die (unbekannte) Wahrscheinlichkeit mit grosser Wahrscheinlichkeit liegt.

Im Gegensatz dazu stehen Zufallsversuche, bei denen von vornherein Annahmen über die Wahrscheinlichkeiten gemacht werden können:

Definition 17.3

Theoretische Wahrscheinlichkeit: Die theoretische Wahrscheinlichkeit basiert auf Annahmen, die über die Ergebnisse eines Zufallsexperiments gemacht werden.

Beispiel 17.3

Die Wahrscheinlichkeit für Kopf bei einem Münzwurf ist $\frac{1}{2}$

Beispiel 17.4

Die Wahrscheinlichkeit für „5" bei einem Würfelwurf ist $\frac{1}{6}$

Beispiel 17.5

Im Auftrag 17.3 wurde angenommen, dass die 21 Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Das war falsch. Richtig war es, eine Tabelle mit 36 Ergebnissen zu erstellen. Die theoretischen Wahrscheinlichkeiten müssen gut begründet werden.

5. Ein roter und ein grüner Würfel werden geworfen. Alle 36 möglichen Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich.

Uns interessiert nun, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Summe der beiden Augenzahlen 8 ist. Dazu erstellen wir eine Tabelle.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für Augensumme 8? Und für 11, 12 beziehungsweise 7?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Weitere Grundbegriffe:

Definition 17.4: Ergebnis

Die Menge aller möglichen Versuchsausgänge eines Zufallsversuchs heisst Ergebnisraum.

Beispiel 17.6

In 17.1 besteht der Ergebnisraum aus den Zahlen 1 bis 6. 17.3

Definition 17.5: Ereignis

Ereignisse sind Zusammenfassungen von Ergebnissen

Beispiel 17.7

Beim Wurf eines Würfels (Auftrag 17.2) bilden die geraden Zahlen $\{2, 4, 6\}$ ein Ereignis. Aber auch $\{6\}$ ist ein Ereignis. Oder auch $\{1, 2, 4, 5\}$.

Beispiel 17.8

Beim Wurf zweier Würfel (Beispiel 17.3) gibt es 36 Ergebnisse. Als Ereignis interessiert uns zum Beispiel „Augensumme 8“.

Zur guten Berechenbarkeit brauchen wir zwei weitere Begriffe:

Definition 17.6

Das sichere Ereignis besteht aus dem gesamten Ergebnisraum. Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1.

Beispiel 17.9

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1,2, 3, 4, 5 oder 6 beim Würfelwurf fällt, ist 1.

Definition 17.7

Das unmögliche Ereignis ist eine leere Menge. Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist 0.

Beispiel 17.10

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine 1,2, 3, 4, 5 oder 6 beim Würfelwurf fällt, ist 0.

6. In einer Klasse befinden sich 12 Schülerinnen und 8 Schüler. Die Lehrperson wählt zufällig eine Schülerin und einen Schüler aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um Sarah und Philipp handelt?

7. Sie werfen einen Würfel zwei Mal hintereinander. Berechnen Sie die (theoretische) Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

a) Die Augensumme ist 4

b) Die Augensumme ist 5

c) Die Augensumme ist 6

d) Die Augensumme ist 7

e) Die Augensumme ist 9

f) Die Augensumme ist 11

g) Die Augensumme ist 12

h) Die Augensumme ist grösser als 1.

i) Das Produkt der Augenzahlen ist 24

j) Das Produkt der Augenzahlen ist 25

k) Das Produkt der Augenzahlen ist 27

Definition 17.8

Laplace-Wahrscheinlichkeit Ein (theoretisches) Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heisst Laplace-Experiment. Um kennzuzeichnen, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, kann zum Beispiel von einem Laplace-Würfel gesprochen werden.

Beispiel 17.11

Der Wurf von zwei Würfeln, Auftrag 17.3

In der ersten Aufgabe haben wir einen Laplace-Versuch. Alle Ereignisse waren gleich wahrscheinlich. Hier lässt sich die Wahrscheinlichkeit leicht berechnen.

Satz 17.2

Laplace-Wahrscheinlichkeit: In einem Laplace-Versuch gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel 17.12

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 3 zu erreichen?

Es gibt 36 Ergebnisse, davon sind zwei günstig: $(1, 2)$ und $(2, 1)$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

8. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine 2 zu werfen?

9. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne mit 3 blauen, 2 gelben und 4 grünen Kugeln eine gelbe Kugel zu ziehen?

10. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man aus einer Lostrommel mit 2 Gewinnen, 48 Trostpreisen und 300 Nieten einen Gewinn zieht?

11. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln die Augensumme 6 zu werfen?

17.2 Mehrstufige Zufallsversuche

Das Beispiel mit den zwei Würfeln lässt sich als zweistufiges Experiment betrachten: zwei Mal hintereinander einen Würfel werfen. Ebenso die Auswahl von Schülerin und Schüler: erst die eine, dann den anderen wählen.

Definition 17.9

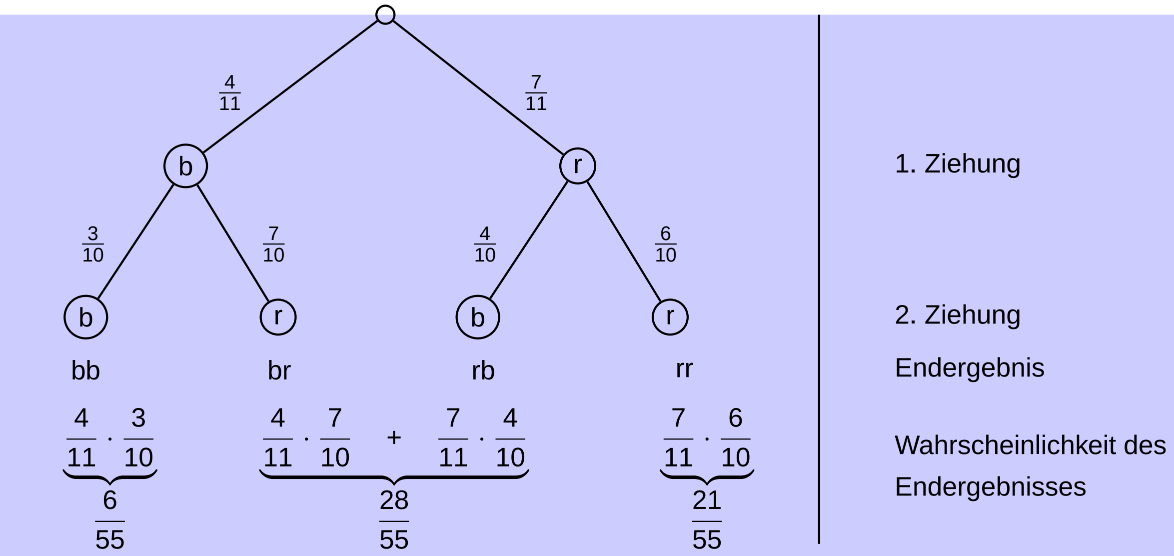
Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren nacheinander oder gleichzeitig ausgeführten Zufallsexperimenten besteht, ist ein mehrstufiges Zufallsexperiment. Ein Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsexperiments setzt sich aus den Ergebnissen der Einzelexperimente zusammen.

Beispiel 17.13

Eine Urne enthält 4 blaue Kugeln und 7 rote Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit nach 2 Ziehungen (ohne Zurücklegen)

- 2 rote Kugeln ($P(rr)$),
- 1 rote und 1 blaue Kugel, ($P(br)$),
- 2 blaue Kugeln ($P(bb)$) zu haben?

Wir stellen alle möglichen Ergebnisse mit Hilfe eines Baumdiagramms dar:



Die erste Ziehung hat als Ergebnis zwei Möglichkeiten; rot oder blau. Was immer auch bei dieser Ziehung herauskommt, ausgehend davon gibt es bei der 2. Ziehung wiederum zwei Möglichkeiten. Das führt zum oben abgebildeten Baum.

Bei jedem Astende sehen wir sofort das Endergebnis nach zwei Ziehungen: Das Endergebnis *bb* kann nur auf eine Art zustande kommen, ebenso das Endergebnis *rr*. Nicht so das Endergebnis *1 rote und 1 blaue Kugel*. Es kann zustande kommen, indem man zuerst blau zieht und dann rot, oder umgekehrt zuerst rot und dann blau.

Damit sieht man nun auch sofort, wie das Endergebnis zu berechnen ist: Innerhalb eines Astes müssen die einzelnen Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden. Die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Äste müssen addiert werden.

Satz 17.3

Pfadregel 1 – Produktregel

Die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades werden multipliziert.

Satz 17.4

Pfadregel 2 – Summenregel

Führen mehrere Pfade zu demselben Ereignis (oben: rb und br), so werden die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Pfade addiert.

Beispiel 17.14

Eine Kreideverpackung wird 1000 Mal geworfen. Dabei landet die Verpackung 970 Mal auf einer der grossen Seiten *ab*, 10 Mal auf einer der Stirnseiten *ac* und 20 Mal auf einer der Seitenkanten *ab*. Wir nehmen also als Wahrscheinlichkeit für die grossen Seiten $p(ab) = 0.97$, für die Stirnseiten $p(ac) = 0.01$ und für die Seitenkanten $p(ab) = 0.02$.
Nun wird die Verpackung zwei Mal hintereinander geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) zwei Mal *bc* fällt?

b) zuerst *ac* und dann *bc* fällt?

c) ein Mal *ac* und ein Mal *bc* fällt?

12. Berechnen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für das Beispiel mit der Urne, wenn die zuerst gezogene Kugel zurückgelegt wird. Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm.

13. Aus der Urne [A, N, A, N, A, S] werden vier Buchstaben nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort 'ANNA' zu erhalten (die Reihenfolge der gezogenen Buchstaben wird berücksichtigt)?

14. Ist es wahrscheinlicher, bei einem Wurf mit zwei Würfeln genau eine „Zwei" zu würfeln oder zwei gerade Zahlen? Arbeiten Sie mit Baumdiagrammen.

15. Für Wetterprognosen in Oberlies gelten die Regeln: Wenn es heute trocken ist, dann ist es morgen mit der Wahrscheinlichkeit 5/6 wieder trocken; wenn es heute regnet, dann regnet es morgen mit der Wahrscheinlichkeit 2/3. Heute ist Sonntag, und es ist trocken. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es am

a) Montag regnet,

b) Dienstag trocken ist,

c) Mittwoch regnet,

d) Donnerstag trocken ist?

16. Beim Spiel „Eile mit Weile" darf eine Spielerin erst beginnen, wenn eine 6 gewürfelt wird. Wir wollen wissen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass sechsmal hintereinander keine 6 gewürfelt wird.

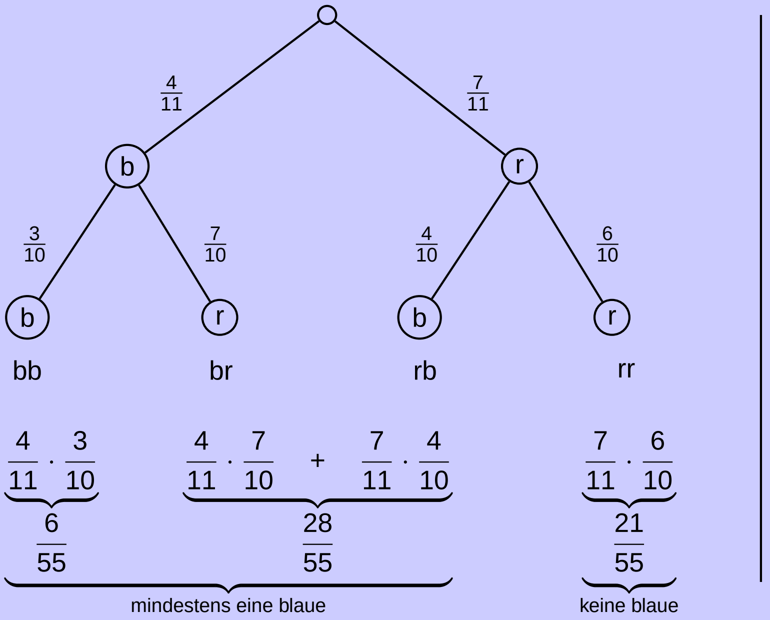
17.3 Gegenwahrscheinlichkeit

Das Beispiel auf Seite 8 lässt uns sofort auch Antworten auf die Fragestellungen in folgendem Beispiel finden:

Beispiel 17.15

Eine Urne enthält 4 blaue Kugeln und 7 rote Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit nach 2 Ziehungen (ohne Zurücklegen) mindestens eine blaue Kugel zu haben?

Lösung: Wir zeichnen den Baum nochmals:



1. Ziehung

2. Ziehung

Endergebnis

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Äste ist stehts 1 = 100 %

Wir sehen, dass drei Äste die geforderte Bedingung *mindestens eine blaue Kugel* erfüllen. Wir können sofort das Endergebnis berechnen, indem wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die drei Äste addieren.

Nun gibt es aber auch einen einfacheren Weg: Es gibt genau ein Ereignis, dass übrig bleibt, nämlich das Ereignis *keine blaue Kugel*. Dies ist gewissermassen das Gegenteil des Ereignisses *mindestens eine blaue Kugel*, welches ja eine blaue oder zwei blaue Kugeln beinhaltet.

Wir stellen weiter fest, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse stets 100 % ist; ein Ereignis muss ja eintreten:

$$P(\text{keine blaue Kugel}) + P(\text{mindestens eine blaue Kugel}) = 1$$

Damit können wir P(mindestens eine blaue Kugel) sofort ausdrücken als

$$P(\text{mindestens eine blaue Kugel}) = 1 - P(\text{keine blaue Kugel}).$$

Dies mag auf den ersten Blick als unnötiger Umweg erscheinen, Beispiel 17.15 und vor allem **??** zeigen aber, dass dies oft der effizientere Weg ist.

Das Ereignis *keine blaue Kugel* ist das sogenannten Gegenereignis des Ereignisses *mindestens eine blaue Kugel*. Ereignis und Gegenereignis zusammen umfassen tets alle möglichen Ergebnisse.

Definition 17.10

Gegenereignis

Fasst man für ein bestimmtes Ereignis A alle ungünstigen Ausgänge zusammen, so beschreibt man damit das Gegenereignis $\overline{A}$. Für die Wahrscheinlichkeiten von Ereignis und Gegenereignis gilt

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Beispiel 17.16

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei 6 Münzwürfen mindestens ein Mal Kopf zu erhalten?
Dieses Beispiel soll illustrieren, dass es oft einfacher ist, den Weg über das Gegenereignis zu nehmen. Jeder der 6 Stufen des Zufallsexperiments hat 2 Möglichkeiten, das gibt $2^6 = 64$. Pfade. Davon sind 63 günstig, nur einer ungünstig. Das Gegenereignis hat also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{64}$. Für die Wahrscheinlichkeit *mindestens ein Kopf* gilt also $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.

17. Es werden 4 Würfel geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen sechser zu erhalten?

18. Tim behauptet, dass bei der nächsten Lottoziehung nur gerade Zahlen gezogen werden. Wie lautet das Gegenereignis?

19. In einer Urne liegen drei weisse und sieben schwarze Kugeln. Es werden vier Kugeln mit einem Griff gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens eine

a) weisse,

b) schwarze Kugel erhält?

20. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ölbohrung fündig wird, betrage 10 %.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zehn Bohrungen mindestens einen Erfolg?

b) Wie viele Ölbohrungen müsste man mindestens durchführen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg grösser als 70 % wird?

17.4 Übungen

21. An 78 Fäden hängen 4 Gewinne. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit einen Gewinn zu ziehen?

22. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne mit 4 weissen, 7 gelben und 12 schwarzen Kugeln eine weisse Kugel zu ziehen?

23. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln die Augensumme 8 zu werfen?

24. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf mit einer Münze

a) Kopf, b) Kopf oder Zahl,

c) Kopf und Zahl zu werfen?

25. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf mit zwei Münzen

a) zwei Mal Kopf b) Kopf und Zahl zu werfen

26. In einer Urne befinden sich 12 Kugeln; 4 1er, 3 2er, 2 3er, 1 4er, 2 5er und 0 6er. Vervollständigen Sie die Tabelle.
Bilden Sie die Summe aller Wahrscheinlichkeiten!

Ergebnis A	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit $P(A)$						

27. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln einen Pasch zu würfeln?

28. In einer Stadt werden von allen Gebäuden 15 % elektrisch, 35 % mit Öl, 25 % mit Kohle und der Rest mit Erdgas beheizt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Gebäude

a) mit Kohle, b) nicht mit Öl, c) weder mit Kohle noch mit Öl

beheizt wird?

29. Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand blind bzw. taub ist, beträgt 0.0085 bzw. 0.005. Beide Gebrechen kombiniert kommen mit der Wahrscheinlichkeit 0.0006 vor. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man blind oder taub ist?

30. Die Pferde Adlatus, Bomber, Candy und Donner bestreiten ein Galopprennen. Die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, ist doppelt so gross wie die von B, und die von B ist doppelt so gross wie die von C. Die Wahrscheinlichkeit, dass D gewinnt, ist dreimal so gross wie die von C. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) A, b) C, c) B oder C gewinnt?

d) Beim Aufgalopp verletzt sich Bomber und kann deshalb am Rennen nicht teilnehmen. Wie gross ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass D gewinnt?

31. In einer Urne befinden sich drei blaue, vier gelbe und zwei rote Kugeln. Sie werden der Reihe nach gezogen und in dieser Reihenfolge nebeneinander gelegt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln gleicher Farbe nebeneinander liegen?

32. Ein Ball mit 5 cm Durchmesser wird, ohne dass dabei gezielt wird, gegen ein Drahtgitter mit quadratischen Maschen von 8 cm Seitenlänge geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Ball, ohne den Draht zu berühren, durch das Gitter hindurchfliegt?

33. Eine Lostrommel enthält 400 Lose. Die Hälfte davon sind Nieten, 80 % des Restes ergeben Trostpreise, die übrigen Lose sind Gewinne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das erste gezogene Los

a) ein Gewinnlos,

b) ein Trostpreis,

c) eine Niete,

d) keine Niete?

34. Eine Urne enthält 11 Kugeln, welche die Zahlen 10 bis 20 tragen. Das Zufallsexperiment besteht im Ziehen einer Kugel und Feststellen ihrer Nummer. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an:

a) Die Quersumme der Kugelnummer ist gerade,

b) Die Quersumme der Kugelnummer ist größer als 6,

c) Die Anzahl der Teiler der Kugelnummer beträgt mindestens 4,

d) Die Kugelnummer ist eine Primzahl,

e) Die Kugelnummer ist nicht gerade, aber durch 3 teilbar.

35. Von 874 Schülern eines Gymnasiums spielen 298 ein Saiteninstrument. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein durch blindes Ziehen aus einer Kartei ermittelter Schüler dieser Schule kein Saiteninstrument spielt?

36. Ein Laplace-Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Nach jedem Wurf wird die geworfene Augenzahl festgestellt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse an:

a) Die erste Augenzahl ist größer als die zweite,

b) Das Produkt beider Augenzahlen ist größer 9,

c) Die erste Augenzahl ist gerade.

d) Es interessiert nur die Augensumme. Geben Sie ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme grösser als 8?

37. Aus einem Jassspiel mit 36 Karten wird eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Karte

a) ein Ass,

b) eine Kreuz-Karte,

c) das Kreuz-Ass,

d) eine Kreuz-Karte, aber kein Ass,

e) weder eine Kreuz-Karte noch ein Ass,

f) eine Kreuz-Karte oder ein Ass,

g) ein Ass, aber keine Kreuz-Karte?

38. Eine rote und eine schwarze Kugel werden zufällig auf drei Kästchen verteilt. Wie viele mögliche Belegungen gibt es?

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

a) Kästchen 1 ist leer,

b) Nur Kästchen 1 ist leer,

c) Genau ein Kästchen ist leer,

d) Zwei Kästchen sind leer.

Aufgaben aus dem Bereich mehrstufige Zufallsversuche

39. Stan und Oliver schiessen gleichzeitig auf dasselbe Ziel. Die Trefferwahrscheinlichkeiten sind 80 % bzw. 70 %. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ziel mindestens einmal getroffen wird?

40. Abel und Kain haben je zwei Kugeln. Sie schiessen abwechselnd auf eine Glasflasche. Abel beginnt. Ihre Trefferwahrscheinlichkeiten sind 1/3 bzw. 1/4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Abel die Flasche zerstört?

41. Ein Klassenlehrer will an einen seiner 22 Schüler ein Freiexemplar *Basler Stadtbuch* aushändigen. Dazu bereitet er 21 Lose mit der Aufschrift *Niete* und ein Los mit *Gewinn* vor und lässt die Schüler dem Alphabet nach je ein Los ziehen. Das gezogene Los wird jeweils nicht zurückgelegt. Ist sein Vorgehen gerecht oder werden gewisse Schüler bevorzugt?

Aufgaben aus dem Bereich Gegenwahrscheinlichkeit

42. In einer Bevölkerung ist statistisch gesehen einer von 100 farbenblind. Wie viele Personen muss man untersuchen, um mit mindestens 95 %iger Sicherheit mindestens eine farbenblinde Person zu finden?

43. Wir haben zehn Lose, davon sind zwei ein Gewinn. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 5 zufällig ausgewählten Losen

a) ein Gewinn,

b) zwei Gewinne,

c) mindestens ein Gewinn ist?

44. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Es seien X bzw. Y die Augenzahlen beim 1. bzw. 2. Wurf. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

a) $P(X = 2)$,

b) $P(Y < 4)$,

c) $P(X \cdot Y \geq 18)$,

d) $P(X < 3 \text{ oder } Y > 2)$,

e) $P(Y > X)$.

45. Eine Prüfung besteht aus 10 Fragen. Es gibt 3 Antworten, von denen jeweils eine die richtige für die jeweilige Frage ist. Ein desinteressierter Schüler antwortet einfach durch Raten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 7 Fragen richtig beantwortet?

46. Fünf Würfel werden geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens

a) eine Dreierzahl,

b) zwei gleiche Augenzahlen?

47. Der florentinische Grossherzog Cosimo III soll Galilei gefragt haben: „Warum erscheint beim Wurf mit drei Würfeln die Augensumme 10 öfter als die Augensumme 9, obwohl beide Summen doch nur auf sechs Arten vorkommen können?“ Können Sie die Frage beantworten?

48. Man wirft einen Würfel viermal hintereinander; im ersten Wurf wirf man die Augenzahl a, im zweiten b, dann c und schliesslich d. Mit diesen Augenzahlen schreibt man die Dezimalzahl $X = a.bcd$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass X grösser ist als

a) $e = 2.71828...$,

b) $\pi = 3.141...$?

49. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit im Schweizer Zahlenlotto (6 aus 42 und 1 aus 6) den Jackpot zu knacken?

50. Ein Fünfliber (Durchmesser 3.1 cm) wird auf ein Schachbrett, dessen Quadratseiten jeweils 4.5 cm messen, fallengelassen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fünfliber auf die Begrenzungslinie eines Feldes fällt?

51. Aus der Urne [M, A, T, H, E, M, A, T, I, K] werden vier Buchstaben nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort ’MAMA’ zu erhalten?

52. Bei einer Warenlieferung von 25 gleichen Posten entschliesst sich ein Käufer, die Lieferung anzunehmen, wenn bei einer zufälligen Kontrolle drei Posten in Ordnung sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Lieferung gekauft, wenn vier Posten Mängel aufweisen?

53. Eine Münzensammlung ist gegen Einbruch an Tür und Schrank gesichert. Nach Werksangabe versagt die Türsicherung in 0.4 %, die Schranksicherung in 1.5 % aller Einbruchsversuche.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit versagen beide Sicherungen?

b) Kontrollen zeigten, dass die Türsicherung an 6 von 45 Tagen gar nicht eingeschaltet ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt ein Einbruch?

54. Eine Urne enthält 10 % schwarze, 30 % weisse und 60 % blaue Kugeln. Es wird mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

a) bei zweimaligem Ziehen nur blaue,

b) bei dreimaligem Ziehen drei verschieden farbige,

c) bei dreimaligem Ziehen höchstens zwei blaue Kugeln zu erhalten?

55. Der eiskalte Alex Frei verwandelt einen Elfmeter mit der Wahrscheinlichkeit von 77 % zu einem Torerfolg. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er

a) bei 8 Elfmetern achtmal erfolgreich?

b) bei 10 Elfmetern mindestens einmal nicht erfolgreich?

c) bei 5 Elfmetern genau einmal nicht erfolgreich?

d) Bei wie vielen Elfmetern muss man mit mindestens 90 %iger Wahrscheinlichkeit damit rechnen, dass Alex einmal seine Fans enttäuscht?

17.5 Übungen zu Wahrscheinlichkeitsberechnungen mit Hilfe von Kombinatorik

Nun soll systematisch die Kombinatorik für Wahrscheinlichkeitsberechnungen verwendet werden. Dazu formulieren wir noch einmal ein wichtiges Prinzip, dass wir bereits oft verwendet haben.

Definition 17.11

Ein Zufallsexperiment heisst *Laplace-Experiment*, wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Damit gilt für ein beliebiges Ereignis:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Dies ist ganz genau der relativen Häufigkeit nach gebaut, bei der ja auch die Häufigkeit eines Merkmals durch die Gesamtzahl geteilt wird.

Beispiel 17.17

Es werden nacheinander 5 Ziffern mit Zurücklegen aus einer Urne mit allen 10 Ziffern gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ziffern verschieden sind?

$$\frac{10!}{5! \cdot 10^5}$$

Dabei ist $\frac{10!}{5!}$ die Anzahl der Möglichkeiten, 5 verschiedene Ziffen zu erhalten (geordnete Ziehung ohne Wiederholung). Und 10^n ist die Anzahl der Möglichkeiten, beliebige 5 Ziffern zu ziehen. Wir gehen dabei davon aus, dass die Ziffern geordnet hingelegt werden. Das gibt eine einfachere Rechnung, als wenn wir auf die Reihenfolge verzichten würden - die Wahrscheinlichkeiten sind aber gleich gross!

Bemerkung: Diese Aufgabe lässt sich auch gut mit einem Baum lösen:

$P(A) = \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10}$.

Beispiel 17.18

In einer Gruppe befinden sich 7 Männer und 9 Frauen. Es werden zufällig vier ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich nur um Männer handelt?

$$\frac{\binom{7}{4}}{\binom{16}{4}} = \frac{35}{1820} = 0.0019 = 0.19\%$$

Sowohl im Zähler wie im Nenner werden 4 ohne Beachtung der Reihenfolge, und ohne Wiederholung ausgewählt. Im Zähler besteht die Grundmenge aus 7 Männern, im Nenner aus den 16 Gruppenangehörigen.

Beispiel 17.19

In einer Gruppe befinden sich 7 Männer und 9 Frauen. Es werden zufällig vier ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau zwei Männer gewählt werden?

$$\frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{16}{4}} = \frac{21 \cdot 36}{1820} = 0.42 = 42\%$$

Beispiel 17.20

Aus 45 Zahlen wählen Sie 6 aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass vier dieser Kugeln bei einer Ziehung von 6 Kugeln aus den 45 getroffen werden?

$$\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} = 0.0013$$

56. Beim Rennquintett müssen die ersten 3 ins Ziel einlaufenden Pferde eines Rennens von 18 Pferden vorhergesagt werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Folgendes erraten:

a) die ersten drei Pferde in richtiger Reihenfolge

b) die ersten drei Pferde

c) 2 der ersten 3 Pferde?

57. Eine Klasse besteht aus 7 Schülerinnen und 13 Schülern. Zur Vorbereitung einer Studienfahrt wird ein Vorbereitungsgruppe mit fünf Personen ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) wird die Klassenchefin ausgelost

b) besteht die Gruppe nur aus Schülern

c) enthält die Gruppe genau einen Schüler

d) enthält die Gruppe drei Schülerinnen und zwei Schüler?

58. In einem Parlament gibt es 80 Frauen 70 Männer. Es wird eine Kommission mit 15 Mitgliedern gebildet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) wird die Parlamentspräsidentin ausgelost

b) besteht die Kommission nur aus Männern

c) enthält die Kommission höchstens einen Mann

d) enthält das Kommission genau 7 Männer?

59. Eine Laplace-Münze wird 10 Mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim 4-ten Wurf zum ersten Mal Wappen erscheint.

60. Beim Schulsportfest treten 5 gleich starke Schülerinnen zum 100m-Lauf an. Zwei der Schülerinnen sind aus der F3g, darunter Else. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten Dreien

a) mindestens eine Schülerin aus der F3g ist,

b) Else ist,

c) beide Schülerinnen aus der F3g sind?

61. Eine Gruppe von 10 Parlamentarierinnen soll aus 2 Parteien zusammengesetzt werden. Die FSU hat 8 Fachleute, die CSP hat 6 Fachleute anzubieten. Auf Grund der Mehrheitsverhältnisse kann die FSU 7 und die CSP 3 Sitze in der Gruppe beanspruchen. Wie viele verschiedene Zusammensetzungen der Gruppe sind möglich?

62. Auf wie viele Arten können 16 Skifahrerinnen auf 2 Gondeln verteilt werden, wenn die eine Gondel noch 10, die andere noch 6 Plätze frei hat?

63. Sechs Jungen und vier Mädchen werden in zwei Mannschaften zu fünf Personen eingeteilt, indem ausgelost wird, wer in welche Mannschaft kommt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in jeder Mannschaft mindestens ein Mädchen mitspielt?

64. Drei Mädchen und drei Jungen setzen sich zufällig verteilt nebeneinander auf eine Bank. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Mädchen nebeneinander sitzen?

17.6 Vertiefungen und Exkurse

65. Der Vater sagt zu seinem Sohne: Du bekommst mehr Taschengeld, wenn Du von drei Tennispartien, die Du abwechselnd gegen mich und Deine Mutter spielst, zwei hintereinander gewinnst. Der Vater ist der stärkere Spieler. Wie soll der Sohn spielen und wie gross ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn er mit der Wahrscheinlichkeit a gegen den Vater bzw. b gegen die Mutter gewinnt?

66. Ein milder(?) Lehrer setzt seine Zeugnisnoten, indem er für jeden Schüler drei Würfel wirft und die grösste der drei Augenzahlen nimmt.

a) Wie viel Prozent seiner Schüler haben eine ’6’?

b) Berechnen Sie den Klassendurchschnitt.

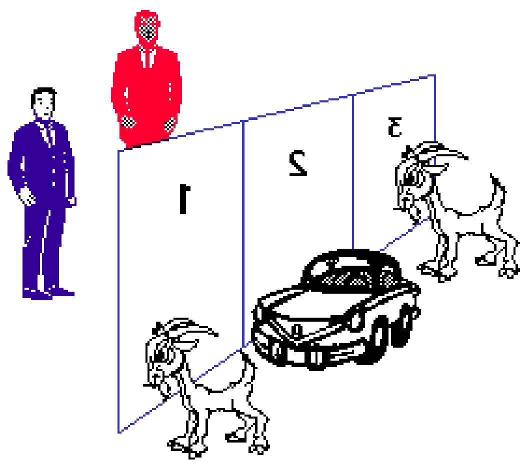
17.6.1 Das Geburtstagsproblem

67. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter dreissig Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag feiern? (vgl. Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=QJYBEmcJ9TU (1:45-10:55))

17.6.2 Monty Hall - Das Ziegenproblem

Herzliche Gratulation! Sie haben die Endrunde unserer Spielshow erreicht. Nun geht es um den Hauptgewinn!

Vor sich sehen Sie drei verschlossene Türen. Hinter einer ist ein Mercedes Coupé, hinter den zwei anderen nur eine Ziege. Die Spielregeln: Sie entscheiden sich für eine Tür, die Tür wird noch nicht geöffnet, sondern ich öffne eine der anderen Türen. Falls der Hauptgewinn, danach noch im Spiel ist, dürfen Sie sich sogar noch umentscheiden - oder bei Ihrer anfänglichen Wahl bleiben!



Das Ziegenproblem tauchte - in dieser Form zumindest - zu Beginn der 90er Jahre auf und hat sowohl für reichlich Verwirrung und Erstaunen gesorgt als auch eine große Anzahl von Personen dazu angestachelt, sich in die Diskussion einzubringen, was unter anderem an der Fülle der Veröffentlichungen aber auch an der Flut von Leserbriefen als Reaktion auf jene deutlich wird. Das Ziegenproblem übte genug Faszination aus, so manchem den bis dahin verborgenen Statistiker herauszulocken – offenbar waren es auch Männer, die meinten, einer gewissen Frau Savant die statistischen Leviten lesen zu müssen. Aber der Reihe nach.

Vor einer Versuchsperson sind 3 Türen aufgebaut. Der Versuchsleiter erklärt, dass hinter zwei der Türen jeweils eine Ziege, hinter einer aber ein Auto sei. Die Person darf sich nun vor eine beliebige der drei Türen stellen. Egal, was sich hinter der erwählten Tür befindet, es gibt immer noch mindestens eine andere, hinter der eine Ziege steht. Eine solche öffnet der Moderator, der genau weiss, was hinter welcher Tür ist – gibt es zwei, so öffnet er eine zufällig.

Es sind zu diesem Zeitpunkt also noch exakt zwei Türen geschlossen, und der Person ist natürlich bekannt, dass sich auf diese Türen eine Ziege und das Auto aufteilen. Der Versuchsleiter macht nun folgenden Vorschlag:

Sie können das Auto gewinnen, wenn Sie vor der richtigen Tür stehen. Sie dürfen vor der zu Beginn ausgewählten Tür stehen bleiben oder zu der anderen, noch verschlossenen Tür wechseln!

An dieser Stelle kann die Beschreibung der Situation aufhören. Das Ziegenproblem ist da. Soll die Person wechseln oder nicht? Ziel der Person wird es sein, das Auto zu gewinnen, sich also vor die entsprechende Tür zu stellen. Was ist die beste Strategie?

Die Frage nach der richtigen Antwort spaltete sogar mathematische Fachbereiche. Das Problem fand seinen Weg in die großen Zeitschriften und wurde auch unter Nichtmathematikern intensiv diskutiert. Die Ja-Partei fand die Meinung der Nein-Partei naiv bis lächerlich - und umgekehrt. Die Angelegenheit hatte auch einen geschlechtsspezifischen Aspekt. Eine der ersten Verfechter des Ja war nämlich die US-Journalistin Marilyn vos Savant, eine Frau, die für ihren besonders hohen IQ-Wert berühmt ist. Es gab Stimmen aus dem Lager der vorwiegend männlichen Mathematiker, die ihr rieten, sich nicht in Sachen einzumischen, von denen sie als Frau keinen Durchblick habe.

Aber wer hatte denn nun Recht? Marilyn lag richtig: Der Kandidat sollte wechseln, denn seine Gewinnchancen erhöhen sich durch das Wechseln tatsächlich von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$. Und das ist immerhin eine Steigerung um 100 Prozent.

Lösungsverzeichnis