M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Kombinatorik

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

6. Juli 2022

16 Kombinatorik

Dieses Kapitel verdanke ich Martin Münch

16.1 Einleitung

Die abzählende Kombinatorik, als Teilgebiet der Kombinatorik (lat. combinare: zusammenstellen, verbinden), befasst sich mit der Bestimmung der Anzahl von Anordnungs- und Auswahlmöglichkeiten. Die Kombinatorik ist also die Kunst des geschickten Abzählens. Unsere Umwelt bietet uns viele kombinatorische Aufgaben: das Aufstellen von Sitzordnungen für Gäste, das Aufstellen von Stunden- oder Fahrplänen, das Lösen von Kreuzworträtseln, das Kartenspiel, das Wählen einer Telefonnummer, der Schulweg, ...

Die abzählende Kombinatorik ist eine wichtige Grundlage für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und wird uns also auch im nächsten Thema, der Wahrscheinlichkeit, intensiv beschäftigen.

Auftrag 16.1

An einer internationalen Meisterschaft, zum Beispiel im Fussball, nehmen 24 Mannschaften teil. Zu Beginn gibt es eine Gruppenphase, dann wird im Play-Off Modus weiter gespielt, bis der Meister feststeht.

Entwerfen Sie verschiedene Spielsysteme (mit verschieden grossen Gruppen) und finden Sie dasjenige, das viel Spannung garantiert, aber auch jedem Team garantiert, nicht schon nach einem Spiel heim fahren zu müssen.

16.2 Regeln des Zählens

16.2.1 Produktregel

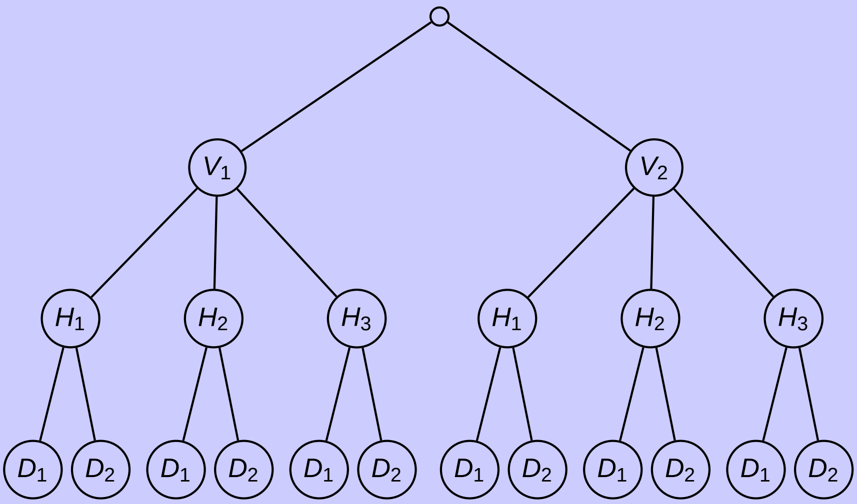
Beispiel 16.1: Windsurfen

Zum Windsurfen braucht es ein Brett, ein Segel, eine Finne und einen Mast. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich mit dem unten genannten Material ein Equipment zusammenzustellen?

Bretter	*Segel*	*Finnen*	*Masten*
Mistral Sreamer 133	Arrows Blade 8.0 m^2	Race 32 cm	Neilpryde Carb 4.80 m
Mistral MTX 105	NeilPryde 6.5 m^2	Race 34 cm	NorthSails Xcell 4.60 m
F2 Wave 2.55 82	GunSails Jam 5.7 m^2	Freerace 38 cm	NorthSails Space 4.60 m
	GunSails TopWave 5 m^2	Wave 30 cm	NorthSails Space 4.40 m
	Neilpryde Wave 4 m^2	Slalom 36 cm	

Beispiel 16.2: Speisekarte

Wir betrachten eine Speisekarte. Sie stellt uns 2 Vorspeisen (V_1, V_2), 3 Hauptgänge (H_1, H_2, H_3) und 2 Desserts (D_1, D_2) zur Auswahl. Es kann aus jedem Gang etwas ausgewählt werden. Wie viele Menüs kann man sich zusammenstellen?



2 Vorspeisen

3 Hauptspeisen, insgesamt $2 \cdot 3 =$ 6 Möglichkeiten

2 Desserts, insgesamt $2 \cdot 3 \cdot 2 =$ 12 Möglichkeiten

Der Baum macht offensichtlich:

a) Zu jeder der zwei Vorspeisen gibt es 3 mögliche Hauptgänge, also insgesamt $2 \cdot 3 = 6$ Menüs, bestehend aus einer Vorspeise und einem Hauptgang.

b) Zu jeder der $2 \cdot 3 = 6$ Menüs wiederum gibt es 2 Desserts, also insgesamt $6 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ Menüs, bestehend aus einer Vorspeise, einem Hauptgang und einem Dessert.

Definition 16.1: Produktregel

Kann ein Vorgang auf n_1 verschiedene Arten ausgeführt werden, danach ein weiterer auf n_2 Arten, dem folgend ein dritter auf n_3 Arten, usw., dann gibt es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ...$ Möglichkeiten den so beschriebenen Gesamtvorgang auszuführen.

1. Ein Wort soll aus 5 Buchstaben bestehen, wobei sich Vokale und Konsonanten wie folgt abwechseln: KVKVK (K: Konsonant (21); V: Vokal (5)). Beispiel: Milan.

Wie viele Möglichkeiten, auch sinnlose, Worte herzustellen gibt es, wenn ein Buchstabe

a) mehrfach

b) nur einmal verwendet werden darf?

2. Eine Wahlkursklasse, die aus 8 Schülerinnen und 9 Schülern besteht, veranstaltet ein Tanzfest. Wie viele verschiedene Tanzpaare, bestehend aus je einer Schülerin und einem Schüler, lassen sich bilden?

3. In Deutschland enthalten die Nummernschilder der Autos häufig zwei Buchstaben, denen drei Ziffern folgen, wobei die erste nicht Null ist. Wie viele solche Nummernschilder gibt es insgesamt?

4. Wäre es möglich, in der Schweiz alle Fahrzeuge mit Autoschildern zu kennzeichnen, die mit zwei Buchstaben beginnen und vier Ziffern (nicht mit 0 beginnend) enden?

5. Wie viele Wege gibt es von einer Ecke eines Würfels in die diagonal gegenüberliegende Ecke, wenn jeder Weg entlang dreier Kanten des Würfels verlaufen soll?

16.2.2 Summenregel

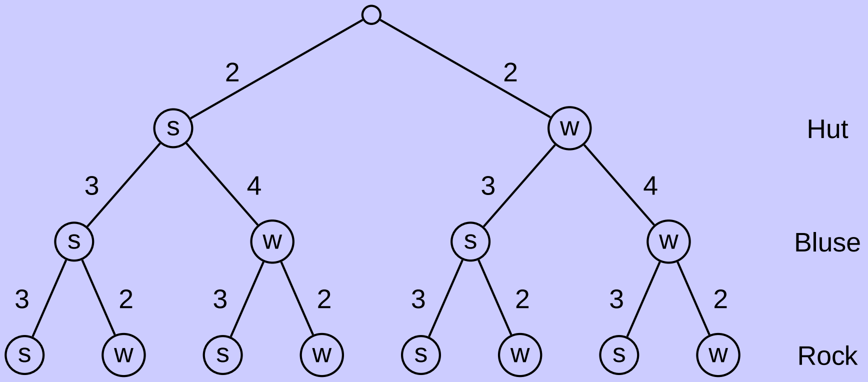
Beispiel 16.3

Frau Anmut hat vier Hüte (zwei weisse (w), zwei schwarze (s)), sieben Blusen (4w, 3s) und fünf Röcke (2w, 3s)

a) Auf wie viele verschiedene Arten kann sie sich kleiden?

b) Wie viele Möglichkeiten bleiben, wenn sie nicht gleichzeitig zwei schwarze Stücke trägt?

Antwort: Aufgabe a) ist nichts Neues: Es gibt $4 \cdot 7 \cdot 5 = 140$ Möglichkeiten sich einzukleiden. Aufgabe b) wird übersichtlich, wenn man wieder einen Baum zu Hilfe nimmt. Dabei ist es aber nicht nötig für jede Möglichkeit einen Ast zu verwenden, sondern es reicht die Unterscheidung nach schwarzen und weissen Kleidungsstücken:



Satz 16.1: Summenregel

Zerfällt ein Problem in unabhängige Teilprobleme, so werden diese Teilprobleme separat betrachtet und die Möglichkeiten addiert. Übertragen auf die Baumdarstellung: Innerhalb eines Astes werden die Möglichkeiten multipliziert (Produktregel), verschiedene Äste werden addiert (Summenregel).

6. Wie viele dreistellige Zahlen kann man mit den sechs Ziffern 2, 3, 5, 6, 7 and 9 bilden, wenn keine Ziffer mehrmals vorkommen darf?

a) Wie viele davon sind kleiner als 400?

b) Wie viele sind gerade?

c) Wie viele sind ungerade?

d) Wie viele sind durch 5 teilbar?

Lösen Sie die obigen Aufgaben ohne die Einschränkung, dass keine Ziffer mehrmals vorkommen darf.

16.2.3 Permutation

Auftrag 16.2

Nehmen Sie drei verschiedenartige Farbstifte (rot, blau, grün).

a) In wie viele verschiedene Reihenfolgen können Sie die drei Stifte nebeneinander legen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es mit 4 (5) verschiedenartigen Farbstiften?

c) Verallgemeinerung: Auf wie viele verschiedene Arten können Sie n Farbstifte anordnen?

Definition 16.2: Permutation

Gegeben sei eine Menge von n Elementen. Jede beliebige Zusammenstellung (in beliebiger Anordnung) sämtlicher Elemente heisst *Permutation.*

Satz 16.2

Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =: n!$$

($n!$ wird n-Fakultät gesprochen).

Wichtig: $0! = 1$ und $1!=1$. Dies wird so definiert, damit in später folgenden Formeln auch die Null und die 1 vorkommen können, und es sinnvolle Ergebnisse gibt.

16.2.4 Das Urnenmodell

Im Prinzip ist mit der Produkt- und Summenregel jedes kombinatorische Problem lösbar. Es ist jedoch manchmal hilfreich, wenn man in der Lage ist die vorliegenden Probleme zu klassifizieren und danach mit einer bekannten Formel zu lösen.

Als sehr nützlich hat sich das Urnenmodell herausgestellt:

Definition 16.3

In einer Urne befinden sich n Lose. Aus dieser Urne sollen k Lose gezogen werden. Das wird **Stichprobe vom Umfang** k. genannt.

Beispiel 16.4

Bei einer Weltmeisterschaft, zum Beispiel im Fussball, werden die Mannschaften in Vierergruppen aufgeteilt. Wir stellen uns die Vierergruppe Schweiz, Brasilien, China und Kamerun vor. Das entspricht den 4 Losen in der Urne. Das Ziehen von zwei Losen entspricht einer Spielpaarung.

a) Wie viele verschiedene Spielpaarungen gibt es? Schweiz-Brasilien, Schweiz-China, Schweiz-Kamerun, Brasilien-China, Brasilien-Kamerun, China-Kamerun.

b) Bei 5 Mannschaften sind es 10 Spielpaarungen: Setzen Sie noch Serbien in die Gruppe. Es kommen vier Spiele mit Serbien hinzu.

Beachten Sie, dass es hier nicht auf die Reihenfolge ankommt: Schweiz-Brasilien und Brasilien-Schweiz entsprechen der gleichen Spielpaarung. Soll es Hin- und Rückspiel geben, vergrössert sich die Anzahl der Spielpaarungen.

Beispiel 16.5

Ein Nummernschild mit sechs Ziffern soll zufällig erzeugt werden. In der Urne befinden sich dann die 10 Ziffern, sechs Mal hintereinander wird gezogen. Da jede Ziffer mehrfach vorkommen darf, muss das gezogene Los immer wieder zurückgelegt werden. Es gibt $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$ Möglichkeiten.

Beim Ziehen aus einer Urne ist es also wichtig, ob die Reihenfolge eine Rolle spielt, und ob es Wiederholungen geben darf. Eine Ziehung kann auf vier verschiedene Arten stattfinden:

Definition 16.4

a) Jedes Los wird einzeln gezogen und nach einer Notiz wieder zurückgegeben. Es ergibt sich eine natürliche Ordnung (Reihenfolge) und jedes Los kann so mehrmals gezogen werden.
Bezeichnung: **Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen**

b) Jedes Los wird einzeln gezogen aber nicht zurückgelegt. Dadurch ergibt sich eine natürliche Ordnung (Reihenfolge) und jedes Los kann nur einmal gezogen werden.
Bezeichnung: **Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen**

c) Die k Lose werden mit einem Griff gezogen, dass heisst die natürliche Reihenfolge geht verloren.
Bezeichnung: **Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen**

d) Die Lose werden einzeln gezogen, und es wird zurück gelegt, jedoch wird die Reihenfolge nicht notiert.
.
Bezeichnung: **Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen**

Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Dies ist das Beispiel mit den Nummernschildern.

Wir ziehen nun also nacheinander eines der n Lose, notieren und legen wieder zurück. Dabei ist uns die Reihenfolge wichtig. Da wir zurücklegen, gibt es bei jeder der k Ziehungen n Möglichkeiten. Aus der Produktregel folgt deshalb, dass es n^k Möglichkeiten gibt.

7. Auf wie viel Arten kann Frau Anmut ihre sieben Blusen in zwei Schubladen legen?

8. Für einen Code werden die Ziffern 1 bis 6 verwendet. Ein Code besteht aus vier Ziffern. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Dies ist das Fussballbeispiel, mit Hin- und Rückspiel.

Wir stellen uns den Vorgang des Ziehens ohne Zurücklegen wieder vor. Bei der ersten Ziehung haben wir noch n Möglichkeiten, bei der zweiten nur noch $n-1$, bei der dritten noch $n-2$ usw.

Satz 16.3

Bei einer geordneten Stichprobe ohne Zurücklegen gibt es

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten

9. Acht Sprinter kämpfen bei den olympischen Spielen um die Gold-, Silber- und Bronzemedaille. Auf wie viele Arten kann die Siegerehrung erfolgen?

10. Auf wie viele Arten können sich 6 Personen auf 9 Stühle verteilen?

Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Beispiel 16.6

Aus den 4 verschiedenen Eissorten Schokolade, Banane, Cafe und Karamell sollen sie zwei auswählen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Ein weiteres Beispiel: in einem Cafe gibt es 24 Sorten Glace. Sie möchten ein Cornet mit drei verschiedenen Sorten. Hier zeigt sich, dass es eine Systematik für dieses Abzählproblem braucht.

Auftrag 16.3

Sie sollen aus einigen Sorten Glace eine Auswahl zusammen stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Sie

a) aus 5 verschiedenen Sorten 2 Kugeln auswählen?

b) aus 5 verschiedenen Sorten 3 Kugeln auswählen?

c) aus 5 verschiedenen Sorten 4 Kugeln auswählen?

d) aus 5 verschiedenen Sorten 5 Kugeln auswählen?

e) aus 6 verschiedenen Sorten 3 auswählen.

f) Sie haben die Sorten Himbeere, Tiramisu und Matcha gewählt. Auf wie viele Arten kann der Glaceverkäufer diese Sorten nacheinander ins Cornet füllen?

Die letzte Unteraufgabe zeigt, dass wir durch $k!$ teilen müssen, um die Ordnung aus der „geordneten Stichprobe ohne Zurücklegen“ herauszunehmen.

Satz 16.4

Für eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen werden aus einer Menge von n Elementen insgesamt k gezogen. Dafür gibt es

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (k)!}$$

Möglichkeiten.

Definition 16.5

Der Binomialkoeffizient „n über k“ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (k)!}$$

Beachten Sie: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$

11. Zu einem Spieltag haben sich 6 Teams angemeldet. Wie viele Spiele braucht es, damit jedes Team mit jedem anderen Team genau einmal gespielt hat?

12. Aus einer Klasse von 24 Personen werden 3 ausgewählt, die in der Mensa aufräumen müssen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Diese Formel wird selten verwendet.

Satz 16.5

Für die ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten.

Auftrag 16.4

Einer Gruppe von 18 Schülerinnen und Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sie

a) drei nummerierte Sitzplätze sind,

b) drei unnummerierte Sitzplätze sind?

Dabei müssen wir noch jeweils unterscheiden, ob ein Schüler (oder eine Schülerin)

α) genau eine Karte oder

β) mehrere Karten nehmen kann.

16.3 Übungen

13. Die Klasse F3x besteht aus 10 Damen und 10 Herren. Wie viele verschiedene Tanzpaare lassen sich bilden? Wie viele Paare sind möglich, wenn zwei Herren fehlen?

14. Wie viele Wurfbilder gibt es beim Bowlen? (Beim Bowlen werden 10 Kegel aufgestellt. Ein Wurfbild zeigt an, welcher der Kegel nach dem Wurf noch steht, und welcher gefallen ist.)

15. Eine Digitaluhr zeigt mit den ersten beiden Ziffern die Stunden und mit den letzten beiden Ziffern die Minuten an. Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen erscheinen innerhalb von 24 Stunden auf der Uhr?

16. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten zur Bildung eines Passwortes gibt es, das

a) genau aus zwei unterschiedlichen Buchstaben des Alphabets besteht?

b) aus einer Zahl besteht mit mind. 2, maximal 3 Ziffern? (ohne die „0“ an erster Stelle)

17. Ein Restaurant bietet 5 verschiedene Suppen, 10 verschiedene Hauptgerichte und 6 verschiedene Nachspeisen an. Hannes hat sich entschieden höchstens eine Suppe, höchstens ein Hauptgericht und höchstens eine Nachspeise zu konsumieren. Wie viele verschiedene Menüzusammenstellungen gibt es unter diesen Voraussetzungen?

18. Vereinfachen und berechnen Sie danach im Kopf:

a) $\frac{10!}{7!}$

b) $\frac{3 \cdot 4!}{4 \cdot 3!}$

c) $\frac{10! \cdot 7!}{5! \cdot 8!}$

d) $\frac{(n+3)!}{n!} : \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

19. k und $n-k$.

a) Vergleichen Sie die Anzahl der Möglichkeiten,

- von 8 Personen 5 auszuwählen, oder
- von 8 Personen 3 auszuwählen.

b) Begründen Sie damit $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

20. Auf wie viele Arten können die Buchstaben B, A, S, E, L angeordnet werden?

21. Drei Physikbücher, vier Informatikbücher und fünf Mathematikbücher sollen auf ein Regal gestellt werden. Auf wie viele Arten geht dies, wenn die Bücher des gleichen Fachgebietes nebeneinander stehen sollen und alle Bücher verschieden sind?

22. Vier Personen möchten sich während eines Konzertes in einer Reihe nebeneinander setzen. Wie viele Möglichkeiten haben die vier?

23. Wie viele (sinnlose) Wörter lassen sich aus den Buchstaben WINDSURF bilden?

24. Im Kino Pathé in Basel hat es 7 Kinosäle. In wie vielen unterschiedlichen Reihenfolgen können Sie die 7 verschiedenen Filme in den Sälen ansehen?

25. Auf Ihrem Smartphone hat es im Moment leider nur 9 Musikstücke. Sie tippen auf die Shuffle-Taste, welche alle Titel in zufälliger Reihenfolge anbietet.
Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es insgesamt?

26. Lösen Sie folgende Aufgaben:

a) Auf wie viele Arten können sich elf Personen in eine Reihe setzen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn sich zwei Personen gut kennen und unbedingt nebeneinander sitzen wollen?

c) Lösen Sie Aufgaben a) und b) für die Sitzordnungen an einem runden Tisch.

27. Wie viele (sinnlose) Wörter lassen sich aus den Buchstaben LIESTAL bilden?

28. Wie viele (sinnlose) Wörter lassen sich aus den Buchstaben BINNINGEN bilden?

29. Ein Signal kann durch sechs Fahnen, die untereinander hängen, gegeben werden. Wie viele verschiedene Signale können mit vier gleichen roten und zwei gleichen blauen Fahnen gebildet werden?

30. 8 weisse und 4 schwarze Spielsteine sind auf 12 Plätze zu verteilen. Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es?

31. Wie viele Anordnungsmöglichkeiten für 16 Kugeln gibt es, wenn 5 rote, 5 blaue, 3 schwarze, 2 grüne und eine weisse Kugel vorhanden sind?

32. Wie viele verschiedene Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 7, 7 and 8 bilden?

33. Wie viele 8-stellige Sequenzen kann man mit den Buchstaben des Wortes ANAKONDA bilden?

34. Auf wie viele Arten kann man neun verschiedene Geschenke an vier Kinder verteilen, wenn das jüngste Kind drei und die anderen je zwei Geschenke erhalten sollen?

35. Die Ziffern einer Zahl sollen durch Werfen eines Würfels bestimmt werden. Wie viele verschiedene 4-stellige Zahlen sind denkbar?

36. Auf einem Parkplatz sind noch 6 Parkplätze frei. Gleichzeitig kommen

a) 3 Autos an.

b) 5 Autos an.

c) 6 Autos an.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die freien Parkplätze den ankommenden Autos zuzuteilen?

37. Wie viele 3-stellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern gibt es, die grösser als 721 sind?

38. In einer Urne befinden sich 5 Kugeln, welche je eine der Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4 tragen. Es wird viermal eine Kugel mit zurücklegen gezogen.

a) Wie viele verschiedene 4-stellige Zahlen könnten gezogen werden? (1.Zug=1.Ziffer,...)

b) Wie viele davon sind gerade?

c) Wie viele davon sind grösser als 2000 aber kleiner als 4000?

39. 17 Schülerinnen und Schüler beteiligen sich an einer Verlosung. Wie viele Preisverleihungen des 1. 2. und 3. Platzes kann es dabei geben?

40. Wie viele Möglichkeiten gibt es für eine Volleyballmannschaft sich am Anfang eines Spiels aufzustellen?

41. Wie viele verschiedene Zeichen lassen sich durch ein Byte darstellen?

42. Wie viele verschiedene Wurfbilder sind möglich bei einem Wurf mit 3 verschiedenfarbigen Würfeln?

43. Sechs Personen steigen in einen Zug, welcher aus drei Wagen besteht. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wie die sechs Personen in den Zug steigen können?

44. Bei einem Safeschloss sind fünf Einstellungen einer Ziffer von 1 bis 9 möglich. Wie viel Zeit benötigt man, um alle Einstellungen auszuprobieren, wenn man für eine Einstellung durchschnittlich vier Sekunden braucht?

45. Wie viele Möglichkeiten gibt es im alten Schweizer Zahlenlotto? Dabei wurden von 45 durchnummerierten Kugeln 6 gezogen.

46. Auf wie viele Arten kann aus 17 Schülerinnen und Schülern einer Klasse eine Volleyballmannschaft (mit 6 Spielerinnen und Spielern) gebildet werden, wenn

a) jede Schülerin und jeder Schüler gewählt werden kann?

b) Jacqueline und Melanie dabei sein sollen?

c) Jenny verletzungsbedingt ausfällt?

47. An zwei Tischen gibt es 5 respektive 7 freie Plätze. Auf wie viele Arten können sich 12 Gäste auf die beiden Tische verteilen?

48. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 36 Jasskarten auf 4 Spielerinnen gleichmässig zu verteilen?

49. Ihre Klasse organisiert einen Spielblock und es stehen 12 verschiedene Spiele zur Auswahl.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Spiele auszuwählen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Spiele auszuwählen und diese in eine Reihenfolge zu bringen?

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den obigen beiden Teilaufgaben?

50. Nun verteilt sich die Klasse an die Spieltische. (Weiterführung der Aufgabe 49)
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die 17 Schülerinnen und Schüler, sich auf die 4 Tische zu verteilen, welche 5, 4, 2 resp. 6 Plätze haben, wenn

a) es nur darauf ankommt, wer an welchem Tisch sitzt (nicht auf welchem Stuhl).

b) es darauf ankommt, wer auf welchem Stuhl sitzt.

51. In einer Mathematikarbeit sind sieben von zehn Aufgaben zu lösen. Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es

a) ohne Einschränkungen,

b) wenn die ersten drei Aufgaben gelöst werden müssen,

c) wenn genau eine der ersten drei Aufgaben gelöst werden muss,

d) wenn genau drei der fünf ersten Aufgaben gelöst werden müssen,

e) wenn mindestens drei der fünf ersten gelöst werden müssen?

Lösungsverzeichnis