M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Exponentialfunktionen

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

6. Juli 2022

15 Wachstum und Zerfall

15.1 Einführung

Wachstum und Zerfall hat zu tun mit einfachem Prozentrechnen, Zins und Zinseszins (Wachstum) und z.B. auch mit dem Abbau von Stoffen im Körper oder radioaktivem Zerfall.

15.1.1 Prozentrechnung

1. Welche der Aussagen bedeuten dasselbe?
   In einem Schulhaus

   a) kommen 20 % der Kinder mit dem Velo zur Schule.

   b) kommt jedes vierte Kind mit dem Velo zur Schule.

   c) kommt eines von fünf Kindern mit dem Velo zur Schule.

   d) kommt ein Sechstel der Kinder mit dem Velo zur Schule.

   e) kommen 75 % der Kinder nicht mit dem Velo zur Schule.

   f) kommen 2 von 10 Kindern mit dem Velo zur Schule.

   g) kommen 16.67 % der Kinder mit dem Velo zur Schule.

   h) kommen 80 % der Kinder nicht mit dem Fahrrad zur Schule.

2. Im Schlaf werden verschiedene Phasen durchlaufen. Gehen Sie hier von 8 Stunden Schlaf mit 5 % Einschlafphase, leichtem Schlaf 48 %, mitteltiefer Tiefschlaf 9 %, Tiefschlaf 13 %, REM-Schlaf 24 % aus.
   Wie viele Minuten werden in der jeweiligen Schlafphase verbracht? (Die Prozentzahlen addieren sich aus Rundungsgründen nicht zu 100 %. Geben Sie Ihre Ihre Ergebnisse auf 5 min gerundet an.)

3. Männer haben einen Energie-Grundumsatz von 4.2 kJ pro Kilogramm Körpergewicht pro Stunde, Frauen einen von 3.5 kJ kg^{-1}. Bei 80-jährigen sinkt dieser Umsatz um 20 bis 30 %. Wie hoch ist demnach der tägliche Grundumsatz eines 80-jährigen Mannes mit 80 kg Gewicht und der einer 80-jährigen Frau mit 65 kg Gewicht?

4. Es gibt verschiedene Empfehlungen, wie sich die Ernährung eines Menschen zusammensetzen soll. Gehen Sie hier davon aus, dass eine Person 2600 kcal pro Tag benötigt und diese zu 10 % to 15 % aus Eiweiss, 55 % to 60 % aus Kohlehydraten und 25 % to 30 % aus Fetten geliefert werden sollen. Wie viele kcal sind das für die einzelnen Bestandteile?

5. Sie benötigen sofort 50 ml 5 %ige Albuminlösung. Ihnen steht 20 %ige Albuminlösung zur Verfügung. Wie stellen Sie die Lösung her und wie viel Wirkstoff ist enthalten?

6. Vom Wirkstoff Digoxin werden 0.25 mg an einem Tag ausgeschieden. Wie viel Digoxin war im Körper vorhanden, wenn dies

a) 20% b) 30% c) 10%

der im Körper vorhandenen Menge war?

7. Von einem Bruttoeinkommen von CHF 70 000.- werden CHF 12 000.- an Steuern abgezogen. Wie viel Prozent des Einkommens macht dies aus?

8. In einem Elektronikgeschäft muss für einen Ausstellungsartikel statt CHF 129.- nur CHF 100.- gezahlt werden. Wie viel Prozent des ursprünglichen Preises sind dies?

9. Auf einen Artikel gibt es 30 % Rabatt. Zu zahlen sind noch CHF 60.-. Wie gross war der ursprüngliche Preis?

10. 20 % der SchülerInnen eines Schulhauses sind AusländerInnen, das sind 35 SchlerInnen. Wie viele SchülerInnen besuchen die Schule?

11. In einem kleinen Betrieb betragen die Jahreslöhne zusammen brutto CHF 330 000.-. Davon muss der Arbeitgeber 1.7 % Berufsunfall- und 1.5 % Nichtberufsunfallversicherung zahlen. Wie viel Prämien werden im jährlich gezahlt?

12. Eine Strasse ist auf der Landkarte (Massstab 1:100 000) 5 cm lang. Sie überwindet 400 m Höhenunterschied. Wie gross ist die Steigung in Prozent?

13. Eine Ware wurde zunächst um 30 % im Preis reduziert und dann noch einmal um 50 %. Wie viel Prozent beträgt die Reduzierung insgesamt?

14. Herr Speku hat vor 6 Jahren für CHF 40 000.- Aktien gekauft. In den ersten beiden Jahren fiel der Wert um 20 %, um dann aber um 60 % zu steigen. Wie viel sind die Aktien heute wert?

Zins und Zinseszins

Definition 15.1

Ein Anfangskapital K_0 ist nach n Jahren bei jährlicher Verzinsung von p% auf $K(n)$ angewachsen.
$K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

15. Auf ein Festkonto wird während 5 Jahren ein gleichbleibender Zinssatz von 2 % gewährt. Wie viel Geld befindet sich am Ende der Laufzeit auf dem Konto, wenn die ursprüngliche Einlage CHF 10 000.- betrug?

16. Herr Teli möchte in 5 Jahren für CHF 30 000.- ein Auto angespart haben. Wie viel muss er heute einzahlen, wenn der Zinssatz 2.5 % beträgt?

17. Der Preis eines Produkts fällt während dreier Jahre jeweils um 20 %.

a) Um wie viel Prozent ist der Preis insgesamt gefallen?

b) Wie teuer wird das Produkt, wenn der ursprüngliche Preis CHF 129.- war?

18. Über welchen Betrag würde man heute (2015) verfügen, wenn bei Christi Geburt 1 Rappen zu 4 % Zins angelegt worden wäre?

19. Welchen Wert hat der in Aufgabe 18 berechnete Betrag, wenn mit einer jährlichen Geldentwertung von 2 % gerechnet wird?

20. Ein glücklicher Erbe erhält aus dem Nachlass seiner Tante von einer Bank CHF 20 716.83 überwiesen. Die Tante hatte vor zwölfeinhalb Jahren bei der Bank Geld zu 6 % angelegt, das nun ihrem Neffen zugute kommen soll. Welchen Betrag hatte die Tante damals angelegt?

21. Bei welchem Zinssatz (in %) verdoppelt sich ein Kapital

a) in 10 Jahren

b) in n Jahren

22. Stimmt es, dass ein Zinssatz von 0.5 % pro Monat einem Zinssatz von etwa 6 % im Jahr entspricht? Begründen Sie Ihre Antwort.

23. Vergleichen Sie die folgenden Angebote für den Kauf eines Hauses:

Angebot A: Die Beträge werden wie folgt fällig:
CHF 180 000.- sind sofort, CHF 200 000.- nach 5 Jahren zu überweisen.

Angebot B: Die Beträge werden wie folgt fällig:
CHF 140 000.- sind sofort, CHF 230 000.- nach 3 Jahren zu überweisen.

Welches der Angebote ist günstiger bei einer Kapitalverzinsung von 5 %?

24. Beim Verkauf eines Hauses wurden die folgenden Angebote gemacht:

Angebot A: Die Beträge werden wie folgt fällig:
CHF 150 000.- sofort, CHF 120 000.- nach 2 Jahren und weitere CHF 150 000.- nach insgesamt 6 Jahren.

Angebot B: Die Beträge werden wie folgt fällig:
CHF 130 000.- sofort, CHF 150 000.- nach 3 Jahren und weitere CHF 140 000.- nach weiteren 2 Jahren.

Welches Angebot sollte der Käufer bei einer Kapitalverzinsung von 7 % wählen?

15.2 Exponentielles: Wachstum und Zerfall

Beispiel 15.1

a) Ein Bakterium teilt sich alle Minute ein Mal.

b) Eine Population von 6 Mrd Individuen verdoppelt sich ein Mal pro Zeiteinheit.

c) Alle Minute halbiert sich die Menge eines radioaktiven Elements. Die Ausgangsmenge ist m_0.

d) Nun halbiert sich die Menge alle 4 min.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Funktion
a)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	
b)												
c)												
d)												

Definition 15.2

Ändert sich bei einem Prozess der Bestand in jedem Zeitschritt mit dem gleichen Faktor, so wird von exponentiellem Wachstum oder exponentiellem Zerfall (wenn der Faktor kleiner als 1 ist) gesprochen.

Zum Vergleich: Bei linearem Wachstum ändert sich der Bestand in jedem Zeitschritt mit dem gleichen Summanden.

25. Ein anfangs 1000 m^2 grosser Teich vergrössert sich durch die Baggerarbeiten jede Woche um 500 m^2. Da der See später als Wassersportfläche genutzt werden soll, wird die Wasserqualität regelmässig untersucht. Besonders genau wird eine Algenart beobachtet, die sich sehr schnell vermehrt. Die von den grünen Algen bedeckte Fläche ist zu Beginn der Baggerarbeiten 1 m^2 gross, sie verdoppelt sich jede Woche. Ein Wissenschaftler behauptet: Bald ist der ganze See grün! Bei den Beamten der Gemeindeverwaltung erntet er nur ungläubiges Kopfschütteln. Wer hat recht?

a) Legen Sie je eine Tabelle für die Zunahme der Wasserfläche und für das Wachstum der Algen an.

b) Stellen Sie die Daten der Tabellen in einem Koordinatensystem dar.

c) Geben Sie jeweils eine Zuordnungsvorschrift an.

d) Wie gross ist die von den Algen bedeckte Fläche nach einer Woche, vier Wochen und welche Fläche würden die Algen nach einem Jahr bedecken, könnten sie sich ungehindert ausbreiten?

26. Ein kleiner Neuwagen kostet mit einigen Extras CHF 20 000.-. Er verliert jedoch rasch an Wert, man rechnet mit einem jährlichen Wertverlust von etwa 20 %.

a) In welchem Jahr ist der Wertverlust des Autos am grössten?

b) Berechnen Sie den Wert des Autos nach 1, 2, 3, ..., 10 Jahren.

c) Nach welcher Zeit ist das Auto nur noch halb soviel Wert wie am Anfang? Diese Zeitspanne nennt sich Halbwertszeit.

d) Zeichnen Sie den Verlauf des Wertes des Autos in das untenstehende Diagramm ein.

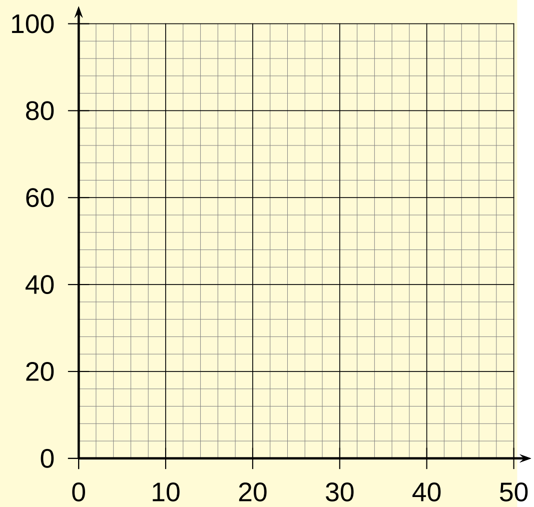
e) Würden Sie sich einen Neuwagen oder einen Occasionwagen kaufen?

Auftrag 15.1: Bestimmen des Wachstumsfaktors

Beispiel A

Gegeben ist die Wertetabelle einer Funktion.

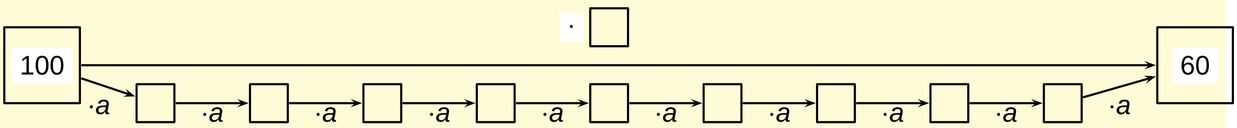
Zeit (s)	0	10	20	30	40
Höhe (mm)	100	60	36	21.6	12.96



a) Stellen Sie die Abnahme grafisch dar.

b) Mit welchem Faktor q erfolgt die Abnahme in jeweils 10 s?
q = ___________ (drei signifikante Ziffern)

c) Mit welchem Faktor a erfolgt die Abnahme in jeweils 1 s?

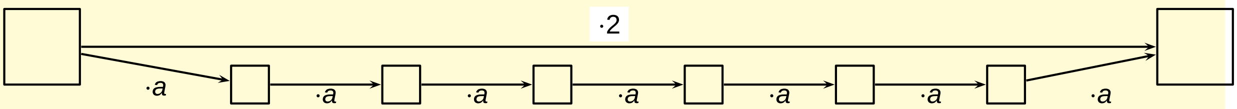


Also: a^{--} = ________ $a = \sqrt{}$ ________ = ___________ (drei signifikante Ziffern)

Beispiel B

Kaninchen

Innerhalb von 7 Jahren verdoppelt sich jeweils eine Anzahl. Mit welchem Faktor erfolgte das Wachstum jährlich?



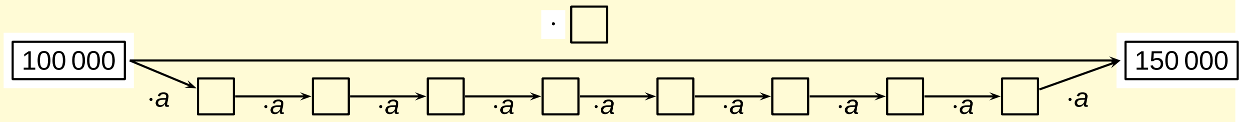
Also: a^{--} = ________ $a = \sqrt{}$ ________ = ___________ (vier signifikante Ziffern)

Jährliche Zunahme in Prozent: ___________ %

Beispiel C

Zinseszins

Ein Kapital von CHF 100 000.- wuchs in 9 Jahren mit Zinseszins auf CHF 150 000.-. Mit welchem jährlichen Wachstumsfaktor erfolgte dies?



Also: a^{--} = ________ $a = \sqrt{}$ ________ = ___________ (vier signifikante Ziffern)

Jährliche Zunahme in Prozent (Zinssatz): ___________ %

Auftrag 15.2: Bestimmen der Zeitspanne

Ein Bestand von 6.1 Mrd wächst jährlich um 1.5 %. In wie vielen Jahren wird dann die 10 Mrd -Grenze überschritten?
Ansatz für die Funktion: $A(x) = 6.1 \cdot (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)^x$
Probieren: gesucht ist die Zahl x, für die erstmals $A(x) \geq 10$:

n	20	50						50
A_n	8.2							12.8

Hinweis: noch müssen wir dies durch Probieren lösen. Später lernen wir eine andere Methode kennen, das «Logarithmieren.»

15.2.1 Zusammenfassung Theorie

Situation: Wir beschäftigen uns mit Wachstumsprozessen, die folgende Charakteristika erfüllen:

- Für $t = 0$ gibt es einen Anfangswert c
- Innerhalb jeden Zeitschritts T gibt es eine konstante Wachstumquote q. Zum Beispiel: jeweils innerhalb von $T = 2$ Stunden verdreifacht sich eine Anzahl, also $q = 3$, oder jeweils innerhalb von $T = 0.1$ Sekunden halbiert sich eine Anzahl, also $q = 0.5$

Die zugehörige Exponentialfunktion lautet dann

$$f(t) = c \cdot q^{t/T}$$

Oft ist es üblich, ein x statt eines t zu verwenden. Es gibt auch Wachstumsprozesse, die nicht von der Zeit abhängen.

Mit einer kleinen Umformung lässt sich die Wachstumsfunktion noch weiter vereinfachen:

$$f(x) = c \cdot q^{x/T} = c \cdot q^{\left((1/T)\cdot x\right)} = c \cdot \left(q^{(1/T)}\right)^x = c \cdot \sqrt[T]{q}^x = c \cdot a^x$$

Dabei ist $\sqrt[T]{q} = a$.

Definition 15.3

$f(x)) = c \cdot a^x$ mit $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ heisst Exponentialfunktion.

Eigenschaften

Bislang war stets $c > 0$. Ausserdem betrachten wir die Variable als Zeit. Dann gilt:

a) Für $a > 1$ steigt die Exponentialkurve .
Für $a < 1$ fällt die Exponentialkurve .

b) Es gilt für den Bestand f(t+1) nach 1 Zeitschritt
$f(t + 1) = f(t) \cdot a$

c) Es gilt für den Bestand f(t+k) nach $k \in \mathbb{N}$ Zeitschritten
$f(t + k) = f(t) \cdot a^k$

d) Bei der Zinseszinsrechnung ist K_0 das Anfangskapital und mit dem Zinssatz p gilt $a = 1 + \frac{p}{100}$. Das ergibt die Zinseszinsformel

$$K(n) = K_0 \cdot a^n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

15.3 Übungen

27. Prüfen Sie, ob es sich um exponentielles Wachstum handelt, wenn

a) täglich 2 % des Monatslohnes für Esswaren ausgegeben werden

b) der Vater bei einer Abmagerungskur wöchentlich 2% seines Gewichtes verliert

c) die Handykosten jedes Jahr um ein Zehntel zunehmen

d) das Kapital jährlich mit 2 % verzinst wird

e) ein Baby jede Woche 150 g zunimmt

f) Opa jedes Jahr 1 % seines enormen Wissens vergisst.

28. Ein Ferkel hat eine Masse von 10 kg. Es nimmt wöchentlich um rund 4 % seiner Masse zu.

a) Mit welchem Wachstumsfaktor muss die Masse pro Woche multipliziert werden?

b) Wie hoch wäre die Masse des Schweins nach 50 Wochen?

c) Stellen Sie eine Funktion auf, die die Masse in Abhängigkeit von den Mastwochen beschreibt.

d) Lösen Sie grafisch: Nach wie vielen Wochen hat das Schwein einem Masse von 52 kg erreicht?

29. Ein Mann mit einer Masse von 100 kg möchte abnehmen. Er verliert wöchentlich rund 2 % seiner Masse.

a) Mit welchem Schwundfaktor muss die Masse pro Woche multipliziert werden?

b) Wie hoch wäre seine Masse nach 30 Wochen?

c) Stellen Sie eine Funktion auf, die die Masse in Abhängigkeit von den Diätwochen beschreibt.

d) Lösen Sie graphisch: Nach wie vielen Wochen hat er sein Idealgewicht von 75 kg erreicht?

Ist die Aufgabe sinnvoll?

30. Ein Waldbestand, in dem 12 Jahre lang kein Holz geschlagen wurde, wird heute auf 60 000 Festmeter geschätzt bei einer jährlichen Zuwachsrate von 3 %. Nun soll der inzwischen vorhandene Zuwachs abgeholzt werden. Wie viele Festmeter sind zu schlagen?

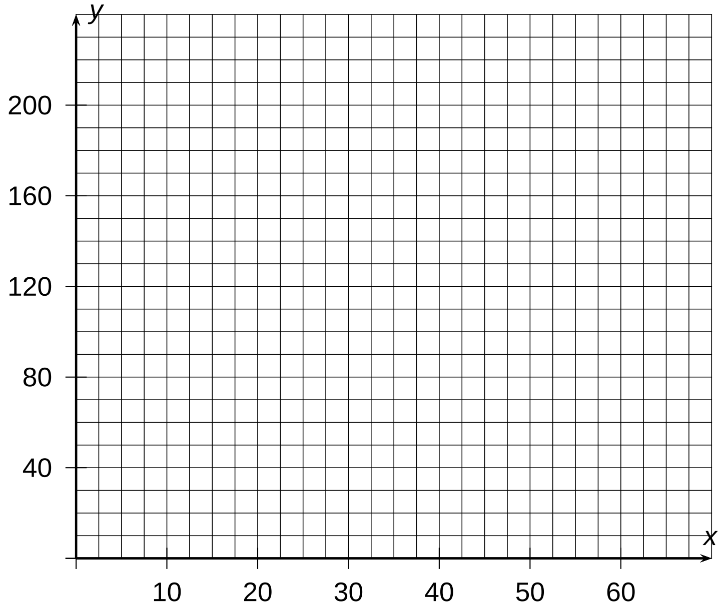
31. 1 cm Kuhmilch enthielt 2 h nach dem Melken 9000 Keime; 1 h später waren 32 000 Keime vorhanden. Wie viele Keime befanden sich in 1 cm frisch gemolkener Kuhmilch, wenn man exponentielles Wachstum annimmt?

32. Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar alle 100 m um etwa 1.3 %. Auf welchen Bruchteil des Luftdrucks in Meereshöhe ist der Luftdruck auf dem Mount Everest (rund 8900 m) abgesunken?

33. In einer Nährlösung werden um 9.10 Uhr 40 Keime gezählt. Man weiss aus Erfahrungsberichten, dass sich ihre Anzahl alle halbe Stunde verdoppelt. Berechnen Sie die Anzahl Keime nach jeweils 10 min. Wenn der Zeitschritt 30 min beträgt, so ist der Bestand nach t Zeitschritten

______________________ .

Zeichnen Sie diesen Sachverhalt in das Diagramm ein.



34. Die Weltorganisation für Meteorologie schätzt, dass sich die CO_2-Konzentration der Atmosphäre jährlich um 0.4 % erhöht. Um wie viel Prozent ist die CO_2-Konzentration im Jahre 2020 höher als im 2015, wenn sich die Zuwachsrate nicht ändert?

35. In einem See nimmt die Helligkeit pro Meter Wassertiefe um 20 % ab. An der Oberfläche beträgt die Helligkeit 100 Einheiten. Wie viele Einheiten sind es in 7 m Wassertiefe?

36. Bei 0 ℃ Aussentemperatur nimmt die Temperatur des Tees in einer Thermoskanne stündlich um 12 % ab. Nach 5 Stunden werden in der Kanne 42 ℃ gemessen. Wie heiss war der Tee beim Einfüllen?

37. Ein Kapital ist mit 6.5 % jährlichem Zinssatz in 40 Jahren mit Zins und Zinseszins auf CHF 400 000.- angewachsen. Wie hoch war das Anfangskapital?

38. Ein radioaktives Präparat zerfällt so, dass seine Menge stündlich um 8.3 % abnimmt. Nach wie vielen ganzen Stunden ist erstmals weniger als ein Zehntel der Anfangsmenge vorhanden?

39. Ein Ball fällt aus 2 m Höhe auf eine feste Unterlage und springt nach jedem Aufprall jeweils auf 80 % der Höhe zurück, aus welcher er gefallen ist. Stellen Sie die Funktion auf, die angibt, welche Höhe der Ball nach dem n-ten Aufprall erreicht. Wie hoch springt der Ball nach dem fünften Aufprall?

40. Der Bierschaum einer bestimmten Biersorte zerfällt in 80 s 1 dm auf 0.5 dm Höhe. Nach weiteren 80 s sind nur noch 0.25 dm Schaum vorhanden usw. Der Zerfall kann in guter Näherung als exponentiell angesehen werden.

a) Ermitteln Sie den funktionellen Zusammenhang zwischen der Schaumhöhe y (in dm) und der Zeit x (in Sekunden).

b) Wie viel Prozent des Schaumes sind nach 10 Minuten noch übrig (zwei geltende Ziffern)?

41. Radioaktive Stoffe zerfallen im Laufe der Zeit. Ein bestimmter radioaktiver Stoff hat eine Halbwertszeit von 4 d, d.h. nach 4 Tagen ist nur noch die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge vorhanden.

a) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor.

b) Wie viel Prozent einer anfangs vorhandenen Menge dieses Stoffes zerfallen jeweils im Verlauf eines Tages?

c) Welcher Bruchteil der anfangs vorhandenen Stoffmenge ist nach 2 d, 3 d, 4 d, 6 d, 8 d and 10 d noch vorhanden? (Fertigen Sie eine Tabelle an.)

d) Zeichnen Sie mit Hilfe der obigen Ergebnisse ein Schaubild der Zuordnung
Zeit in Tagen $\mapsto$ *vorhandener Bruchteil in Prozent*
und ermitteln Sie graphisch nach wie vielen Tagen nur noch $\frac{1}{5}$ der anfangs vorhandenen Stoffmenge vorhanden ist.

e) Wann sind es noch 10 Prozent?

42. Um zu untersuchen, wie man eine bestimmte Bakterienart bekämpfen kann, braucht man zunächst eine grosse Anzahl dieser Bakterien. Dazu bringt man einige von ihnen in eine Nährlösung, wo sie sich jede Stunde verdoppeln. Für den Forscher ist es wichtig zu wissen, wie lange er warten muss, bis eine gewünschte Anzahl von Bakterien vorhanden ist.
Anfangs seien 10 Bakterien vorhanden. Der gewünschte Bestand: 8000 Bakterien.

43. In lebenden Organismen besteht Kohlenstoff aus stabilen Atomkernen sowie, mit einem Anteil von 3.0×10^{-10}, aus radioaktiven Atomkernen ^{14}C, die durch kosmische Strahlung entstehen. Sobald ein organischer Stoff stirbt, nimmt der ^{14}C Anteil mit einer Halbwertszeit von 5736 Jahren exponentiell ab.

a) Geben Sie das Wachstumsgesetz des ^{14}C-Anteils in der Form $B(t) = B(0) \cdot a^t$ an, wobei t die Zeit in Jahren bedeutet. Berechnen Sie a auf 6 Nachkommastellen genau.

b) Um wie viel Prozent nimmt der ^{14}C-Anteil in 1000 Jahren ab?

c) Im Jahre 1969 stellten Forscher in der Leinwand einer altägyptischen Königsmumie einen ^{14}C-Anteil von $1.75 \cdot 10^{-10}$ fest. Datieren Sie die Mumie.

44. Eine Bakterienkultur nimmt täglich um 40 % zu. Im Moment zählt die Kultur 500 000 Bakterien.

a) Wie viele Bakterien waren vor einer Woche vorhanden?

b) Schreiben Sie das Wachstumsgesetz auf.

45. Eine Bakterienart vermehrt sich im Labor unter günstigen Bedingungen alle 10 Minuten um 20 %. Nach welcher Zeit hat sich die Population spätestens

a) verdoppelt?

b) verdreifacht?

Versuchen Sie, eine minutengenaue Antwort zu geben.

46. Am Eröffnungstag eines Streichelzoos befanden sich 93 Meerschweinchen in einem Gehege. Ein Jahr später waren es bereits 115 Meerschweinchen.

a) Wie viele Meerschweinchen werden es am Tag des 10-jährigen Jubiläums sein, wenn man annimmt, dass der Bestand linear wächst?

b) Wie viele Meerschweinchen werden es an diesem Tag sein, wenn man ein exponentielles Wachstum annimmt?

47. Der Bestand an Kaninchen in einem Park wuchs in 15 Jahren exponentiell von 30 auf 110 Kaninchen.

a) Wie gross ist der jährliche Wachstumsfaktor?

b) Bestimmen Sie auch den Prozentsatz der jährlichen Zunahme.

Auftrag 15.3

In Australien wurden im Jahre 1859 vierundzwanzig Wildkaninchen ausgesetzt. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde der Bestand auf 500 Millionen Wildkaninchen geschätzt.

a) Stellen Sie dazu eine exponentielle Wachstumsfunktion auf.

b) Anderen Angaben zufolge lebten im Jahr 1890 geschätzte 20 Millionen Wildkaninchen in Australien. Passt diese Angabe, näherungsweise, zur oben aufgestellten Wachstumsfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Auftrag 15.4

Besuchen Sie https://www.youtube.com/watch?v=mpOg1w2I-pw&t=3s

Stellen Sie die Höhe des Bierschaums nach 1, 2, 3 und 4 Minuten fest. Finden Sie eine Exponentialfunktion, die diesen Prozess möglichst gut beschreibt.

Auftrag 15.5

Schauen Sie sich das Video an:

https://www.youtube.com/watch?v=hbtEFbjnBvI

15.4 Logarithmen

Die Frage, wann eine gewisse Menge erreicht wurde, lässt sich bislang nur graphisch oder mit Probieren lösen. Die rechnerische Lösung wird mit Logarithmen erreicht.

Beispiel 15.2

Ein Auto mit Neuwert 20000 CHF verliert jedes Jahr 20 Prozent an Wert. Dazu gehört die Exponentialfunktion

$f(t) = 20000 \cdot 0.8^t$. Gefragt ist nun, wann der Wagen nur halb so viel wert ist, also

$100000 = 20000 \cdot 0.8^t$. Teilen wir durch den Anfangswert, so ergibt sich $0.5 = 0.8^t$.

Das können wir bislang nur bislang nur graphisch oder mit Probieren lösen. Die rechnerische Lösung wird mit Logarithmen erreicht.

Definition 15.4

Wird die Gleichung $a^y = x$ nach y aufgelöst, so heisst y der „Logarithmus von y zur Basis a“.

$$y = \log_a(x)$$

Beispiel 15.3

a) $32 = 2^{\Rightarrow} y = \log_2 32$
   $32 = 2^5 \Rightarrow y = 5 = \log_2 32$

b) $1000 = 10^y \Rightarrow y = \log_{10} 1000$
   $10000 = 10^4 \Rightarrow y = 4 = \log_{10} 10000$

Kontrast: $y = \sqrt[n]{x}$ ist die Lösung der Gleichung $x = y^n$

Definition 15.5

$\log_{10} y = lg\, y$

48. Schreiben Sie die folgenden Aufgaben als Potenz und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $\log_2 8$ b) $\log_3 9$ c) $\log_3 27$

d) $\log_3 81$ e) $\log_5 125$ f) $\log_5 5^7$

g) $lg \sqrt{10}$ h) $\log_5 5$ i) $\log_2 1$

Obige Definition des Logarithmus ist gleichwertig mit:

Definition 15.6

Der Logarithmus $\log_a(x)$ ist die Zahl, mit der die Basis a potenziert werden muss, um x zu erhalten.

Satz 15.1

Zur Logarithmusgleichung $y = \log_a(x)$ gehört die äquivalente Exponentialgleichung $x = a^y$

Satz 15.2

Es gilt $a^{\log_a x} = x$ und $y = \log_a a^y$

Logarithmieren und Exponieren sind also Umkehroperationen voneinander.

Beispiel 15.4

$10^{\lg 5} = 5$

Satz 15.3

$\log_x(1) = 0$

Denn $x^0 = 1$.

Satz 15.4

$\log_x(x) = 1$

Denn $x^1 = x$.

Ebenso lassen sich durch Zurückführen auf die Potenzrechengesetze die folgenden Zusammenhänge zeigen:

Satz 15.5

Es gilt für alle Basen a und b

a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

b) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

c) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

49. Lösen Sie mit Hilfe des Taschenrechners

a) $5 = 7^t$ b) $3 = 0.5^t$ c) $6 = 8^t$

d) $0.5 = 20^t$ e) $-3 = 5^t$

50. Schreiben Sie jeweils die äquivalente Exponentialgleichung auf und lösen Sie sie ohne Taschenrechner

a) $x = \log_{0.5} \frac{1}{4}$ b) $x = \log_{0.5} \frac{1}{2^{10}}$ c) $x = \log_{0.5} 2$

d) $x = \log_{0.5} 16$ e) $x = \log_{0.5} \sqrt{2}$ f) $x = \log_{0.5} 2\sqrt{2}$

g) $x = \log_{0.1} 10$ h) $x = \log_{10} 0.1$ i) $x = \log_{0.01} 10$

j) $x = \log_{0.01} 0.01$ k) $x = \log_{0.01} 0.1$ l) $\log_y 9 = 3$

m) $\log_y 2 = 4$ n) $\log_z 100 = 2$

15.4.1 Übungen II

51. Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet pro Minute etwa 4 % des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus.
Bei einer Untersuchung wird einem Patienten 0.2 g des Farbstoffs injiziert. Nach 30 min sind noch 0.09 g des Farbstoffs in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden.
Funktioniert seine Bauchspeicheldrüse normal?

52. Um wie viel Prozent nimmt der Energieverbrauch einer Stadt jährlich zu?

a) Der Energieverbrauch verdoppelt sich in 20 Jahren.

b) Der Energieverbrauch verdreifacht sich in 30 Jahren.

53. Um wie viel Prozent nimmt der Wert eines Autos jährlich ab, wenn sein Wert

a) nach 2 Jahren auf die Hälfte des Neuwerts abgesunken ist?

b) nach 4 Jahren auf ein Viertel des Neuwerts abgesunken ist?

54. Im Jahre 1626 verkauften Indianer die Insel Manhattan (inmitten des heutigen New York) für 24 Dollar an einen Siedler namens Peter Minuit. Welchen Wert hätte dieser Betrag heute (2015), wenn er damals bei einer Bank zu einem gleich bleibenden Jahressatz von 4 % (6 %) angelegt worden wäre?

55. Eine Bakterienpopulation umfasst 4×10^6 Exemplare. Nach 1.5 h hat sich die Zahl der Exemplare vervierfacht. Wir nehmen an, dass die Zahl der Exemplare exponentiell wächst. Wie viele Exemplare sind nach 10 h vorhanden? Wann hat sich die Zahl der Bakterien verzehnfacht?

56. Von 5 kg eines radioaktiven Isotops sind nach 5 h noch 2 kg vorhanden. Wie lautet das Zerfallsgesetz?

57. In lebendem Holz ist das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C-14 enthalten. Der Anteil dieses Kohlenstoffisotops ist konstant, so lange das Holz lebt. Beim Absterben des Holzes hört jeder Austausch von Kohlenstoff mit der Umgebung auf. Der Anteil von C-14 nimmt exponentiell ab. Die Halbwertzeit von C-14 beträgt 5730 Jahre.
In Holzresten, die Menschen in der Höhle von Lascaux hinterlassen hatten, wurde noch 14 % des ursprünglichen C-14 Gehalts festgestellt. Wie lange liegt dieses Holz (höchstens) in der Höhle?

58. Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe exponentiell ab. Er beträgt bei 5500 m Höhe über dem Meer nur noch die Hälfte des Wertes von ca 1000 mbar auf Meereshöhe.

a) Welcher Luftdruck ist auf dem Mount Everest, der 8848 m hoch ist, zu erwarten? (Sie brauchen eine Formel, wie sich der Luftdruck aus der Höhe berechnet.)

b) Beträgt der Luftdruck nur noch 40 % des Wertes auf Meereshöhe, so kann der menschliche Körper nicht mehr mit genügend Sauerstoff versorgt werden. Auf welcher Höhe ist dies der Fall?

c) Geben Sie eine Formel an, wie sich die Höhe aus dem Luftdruck ergibt.

59. Eine Zahl von Hellraumprojektorfolien wird unter eine Lampe gelegt. Unterhalb der Lampe steht ein Lichtmesser. Es wird gemessen, welche Lichtstärke durch die Folien hindurchkommt (Die Lichtintensität wird in Lux gemessen.) Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse dieses Experiments:

Zahl der Folien	0	6	10	16	21	26
Anzeige in Lux	3000	2000	1500	1000	750	500

a) Finden Sie eine Exponentialfunktion, die dieses Experiment annähernd beschreibt. Prüfen Sie mit einigen Werten aus der Tabelle nach, ob die Näherung einigermassen gut ist.

Benutzen Sie bei den folgenden Aufgabenteilen Ihre Funktion aus Teil a). Haben Sie keine Funktion gefunden, so dürfen Sie $f(z) = 20 \cdot 0.8^{\frac{z}{8}}$ *verwenden.*

b) Bei wie vielen Folien wird das Licht um 75 % geschwächt?

c) Welche Helligkeitsanzeige ist bei nur einer Folie zu erwarten?

d) Eine Folie ist 0.5 mm dick. Schreibe die Funktionsgleichung so um, dass die Lichtstärke in Abhängigkeit von der Stapelhöhe h in mm angegeben wird.

15.5 Vertiefungen und Exkurse

15.5.1 Exkurs: Medikamentöse Therapie

Gemäss Wikipedia werden zur Behandlung von Herzinsuffizienz Medikamente gegeben, die Digoxin enthalten. Dies steigert die Schlagkraft und senkt die Schlagfrequenz des Herzens und ist bei diesen Patienten erwünscht - kann aber auch sehr schädlich sein. Digoxin ist der Wirkstoff des Fingerhuts und dieser wirkt in hohen Dosierungen sehr giftig. Andererseits muss eine gewisse Konzentration von Digoxin im Körper vorhanden sein, damit es therapeutisch wirken kann. (**herzglykoside**)

lanicor beschreibt das «therapeutische Fenster» zwischen Wirkungslosigkeit und Giftigkeit bei Digoxin als sehr klein, und ist von Patienten zu Patienten verschieden. Es wird von $0.8\,\mu g\,l^{-1}$ to $2\,\mu g\,l^{-1}$ ausgegangen. Digoxin wird im Körper abgebaut, es wird von 20 % to 25 % täglicher Abbaurate ausgegangen. Die Vollwirkdosis (durch Einnahme von Digoxin sofort in den therapeutischen Bereich kommend) beträgt 0.8 mg to 1.5 mg Digoxin, die tägliche Erhaltungsdosis liegt bei 0.25 mg Digoxin. (**lanicor**)

Auftrag 15.6

In diesem Arbeitsauftrag sollen eine mögliche Therapie mit dem Medikament betrachtet werden.[a]

a) Gehen Sie davon aus, dass die Gabe von 1 mg Digoxin im Körper zu einer Dosierung von $1\,\mu g\,l^{-1}$ führt. Davon werden täglich 20 Prozent abgebaut, also bleiben 80 % im Körper. Erstellen Sie mit einer Tabellenkalkulation ein Dokument, dass folgende beiden Therapien vergleicht, also den Wirkstoffgehalt im Blut in jedem von 30 Tagen Therapie darstellt.

   a_1) Es wird einmalig 1.5 mg Digoxin gegeben, und dann täglich 0.25 mg.

   a_2) Es werden jeden Tag 0.25 mg gegeben.

   Bleiben beide Therapien unterhalb des kritischen Bereichs? Welche Vorteile haben jeweils die beiden Therapien?

b) Wichtig ist die Einhaltung des therapeutischen Bereichs. Die Abbaurate im Körper ist allerdings individuell verschieden. Experimentieren Sie mit Abbauraten über und unter den 20 %. Bleiben die Therapien im therapeutischen Bereich?

c) Auffallend ist, dass beide Therapien nach einiger Zeit zur gleichen Wirkstoffkonzentration führen. Woran liegt das? (Berechnen Sie dazu, was von der am ersten Tag gegebenen Dosis nach 30 Tagen noch übrig ist.

d) Versuchen Sie für die sich einstellende Wirkstoffkonzentration eine Formel aufzustellen. Bedenken Sie, dass immer 0.25 mg täglich gegeben werden, die Abbaurate aber verschieden ist.

[a] Selbstverständlich muss dies in der Praxis von einem Arzt durchgeführt werden, mögliche Nebenwirkungen müssen beobachtet werden.

Auftrag 15.7

Im Leitungswasser der Gemeinde Grettlach ist die Substanz T_2L_3 vorhanden. Die Konzentration beträgt 0.05 mg l^{-1}. Frau Ello kommt neu nach Grettlach, in ihrem Körper ist die Substanz bisher nicht vorhanden. Die Person konsumiert täglich 3 l des Wassers. Der Abbau der Substanz im Körper erfolgt exponentiell. Es werden innerhalb von einer Woche 60 Prozent der Substanz abgebaut.

a) Wie viel mg des am ersten Tag aufgenommenen T_2L_3 ist nach 5 Tagen noch im Körper vorhanden?

b) Wie viel Substanz ist insgesamt nach 1 Jahr im Körper vorhanden? (Lösen Sie mit Hilfe von Tabellenkalkulation.)

c) Wie viel Wasser darf die Person pro Tag von diesem Wasser regelmässig konsumieren, damit nie mehr als der Grenzwert von 1 mg im Körper vorhanden ist? (Tabellenkalkulation.)

Vereinfachende Annahme: Das Wasser wird jeweils genau um 00.00h getrunken. Nach einem Tag wurden also 3 l getrunken und wie oben beschrieben zum Teil abgebaut.

Auftrag 15.8

Statt den Zerfall eines Wirkstoffs im Körper wird nun noch einmal das Wachsen des Geldes auf dem Konto betrachtet. Ein Sparer zahlt jedes Jahr CHF 6000.- auf ein Konto ein. Er bekommt jährlich 4 % Zins. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Tabellenkalkulation, wie viel Geld er nach 20 Jahren besitzt. Vergleichen Sie mit der Situation beim Medikamentenabbau.

Auftrag 15.9: Wärmeleitung – Bearbeitung mit Tabellenkalkulation

Ein Behälter mit heissem Wasser wird stehen gelassen. Die Temperatur in °C wird in konstanten Abständen von 5 Minuten gemessen. Die Aussentemperatur beträgt 19.6°C.

Zeit	0	5	10	15	20
Temperatur	84.6	79.0	72.2	66.4	61.8

Für die Modellierung wird angenommen, dass die Temperaturabnahme von der Differenz zur Aussentemperatur abhängt:

Temperatur in 5 Minuten = Temperatur jetzt - Konstante * (Temperatur jetzt - Aussentemperatur)

Erstellen Sie ein Tabellenkalkulationsdokument in dem Sie mit verschiedenen Konstanten versuchen, eine Modellierung zu finden, die den realen Messungen entspricht. Gehen Sie also von einer Starttemperatur von 84.6°C aus und berechnen Sie die folgenden Temperaturen mit verschiedenen Konstanten. Welche Zahl passt? Welche Temperatur hat das Wasser dann nach 30 Minuten?

Mit dieser Tabelle lässt sich dann auch folgendes Problem lösen: Eine Person möchte einen Tee trinken, wird aber 10 Minuten davon abgehalten. Wann ist der Tee heisser: wenn die Milch zu Beginn oder nach den 10 Minuten dazu gekippt wird?

15.5.2 Vertiefung: Graphen von Exponentialfunktionen

Auftrag 15.10

a) Dargestellt ist die Exponentialfunktion $f(x) = 0.8^x$. Lesen Sie ihre Werte ab und tragen Sie sie in die Wertetabelle ein. Kontrollieren Sie durch Rechnung.

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.8^x																	

b) Erstellen Sie für die Funktion $f(x) = 1.25^x$ eine Wertetabelle und zeichnen Sie ihren Graphen.

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1.25^x																	

Vergleichen Sie mit der obigen Aufgabe:

geometrisch: ________________________ rechnerisch: $1.25 \cdot 0.8 =$ ____________
(also: $1.25 = \frac{1}{0.8}$)

c) Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen von $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ und von $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$.

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\left(\frac{3}{4}\right)^x$																	
$\left(\frac{4}{3}\right)^x$																	

15.5.3 Vertiefung: Klassifizierung von Wachstumsprozessen

Auftrag 15.11

Hier sind einige Funktionen dargestellt: teils mit Wertetabellen, teils als Graphen, teils als Zuordnungsvorschrift, teils in Worten beschrieben

Betrachtet werden jeweils nur Stellen, die grösser als Null sind.

Gemeinsam haben die Funktionen, dass sie wachsend sind: die Funktionswerte nehmen zu, wenn x positiv ist.

Arbeiten Sie daran, die Funktionen zu klassifizieren:

erstellen Sie von jeder Funktion eine Wertetabelle und einen Graphen, versuchen Sie die Zuordnungsvorschrift zu erkennen. Verwenden Sie für jede Funktion eine eigene Seite, so dass Kopien angefertigt werden können.

Obwohl die Funktionen für alle Zahlen, also zum Beispiel auch alle Dezimalzahlen erklärt sind, kann es helfen, eine rekursive Vorschrift, um von einer Stelle zur Stelle „+1“ zu kommen.

Erarbeiten Sie dann Gemeinsamkeiten und Unterschiede, versuchen Sie verschiedene Typen zu erkennen.

a) Die erste Funktion $a(x)$ ist gegeben durch eine Zuordnungsvorschrift

$$a(x) = x^2$$

b) Die zweite Funktion ist gegeben durch eine Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$b(x)$	3	5	7	9	11	13	15	17	19

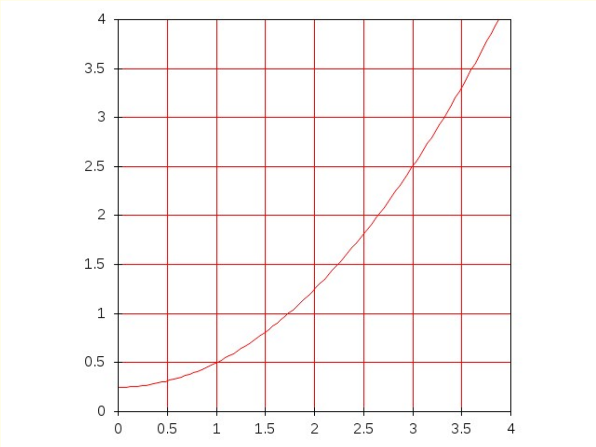
c) Wieder eine Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6
$c(x)$	1	3	9	27	81	243	729

d) Eine Zuordnungsvorschrift:

$$d(x) = 2^x$$

e) Die Funktion hat den folgenden Graphen



f) Bei einem Experiment wird ein Parameter achtmal im Abstand von 10 Sekunden gemessen

t	0	10	20	30	40	50	60	70
$f(t)$	15.0	16.1	17.0	17.9	18.9	19.8	21.1	22.0

Bedenken Sie: Messungen sind meist ein wenig ungenau.

g) Bei einem Experiment wird ein Parameter achtmal im Abstand von 10 Sekunden gemessen

t	0	10	20	30	40	50	60	70
$g(t)$	10.0	15.3	22.5	33.6	50.6	76.0	113.9	169.9

Bedenken Sie: Messungen sind meist ein wenig ungenau.

h) Bei einem Experiment wird ein Parameter achtmal im Abstand von 10 Sekunden gemessen

t	0	10	20	30	40	50	60	70
$h(t)$	180	321	498	715	982	1280	1616	1998

Bedenken Sie: Messungen sind meist ein wenig ungenau.

i) Ein gleichseitiges Dreieck hat die Seitenlänge $x$cm. Gefragt ist die Fläche.

j) Ein gleichseitiges Dreieck hat die Seitenlänge $x$cm. Gefragt ist der Umfang.

k) Ein Tetraeder besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge $x$cm. Gefragt ist das Volumen. (Formelsammlung hilft...)

l) Ein Ferkel hat eine Masse von 10kg. Es nimmt wöchentlich um rund 4% seiner Masse zu.

m) Herr Konrad erhält am Jahresbeginn einen Kredit von 10’000 CHF. Der jährliche Zinssatz beträgt 10%, die jährliche Rate 1800 CHF.

n) Zu Beginn des Jahres 2000 lebten etwa 6 Milliarden Menschen auf der Welt. Nach einer Prognose nimmt die Weltbevölkerung jede Minute um 200 Menschen zu.

o) Zu Beginn des Jahres 2000 lebten etwa 6 Milliarden Menschen auf der Welt. Nach einer Prognose steigt die Weltbevölkerung um jährlich 1.4%.

p) Die Breite eines Quaders ist x. Die Tiefe ist $x + 1$ und die Höhe ist $x + 2$. Die Funktion ordnet jedem x das Volumen des Quaders zu.

q) Die Breite eines Quaders ist x. Die Tiefe ist $x + 1$ und die Höhe ist $x + 2$. Die Funktion ordnet jedem x die Oberfläche des Quaders zu.

r) Ein Bakterium teilt sich alle Minute ein Mal.

s) $1/256$ des Sees ist mit Algen bedeckt. Die Algenfläche verdoppelt sich innerhalb von 5 Tagen.

t) Eine Zuordnungsvorschrift:

$$t(x) = 2 \cdot 1.2^x$$

Lösungsverzeichnis