M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Körper

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

6. Juli 2022

Dieser Abschnitt entspricht noch nicht dem neuen Lehrplan.

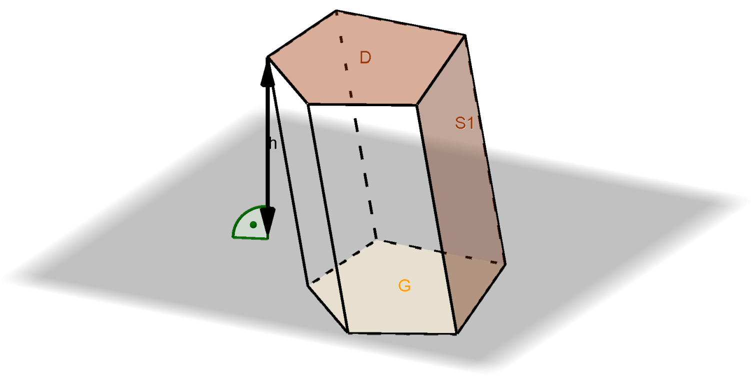
13 Stereometrie

In diesem Abschnitt geht es nicht nur um das Zeichnen von Körpern, sondern vor allem auch um die Berechnung von Volumen und Oberfläche.

13.1 Körpersammlung

Hier werden die bekannten Formeln zur Körperberechnung zusammengefasst.

Prisma



Ein Prisma entsteht, indem ein Vieleck G parallel nach oben verschoben wird. Das Prisma besteht aus dem ganzen dabei überstrichenen Bereich.

Deckfläche und Grundfläche eines Prismas sind also gleich. Die Seitenflächen, Beispiel S_1, bestehen aus Parallelogrammen. Die Höhe h wird senkrecht von der Ebene der Grundfläche (in der Skizze leicht angedeutet) senkrecht bis zur Deckfläche gemessen.

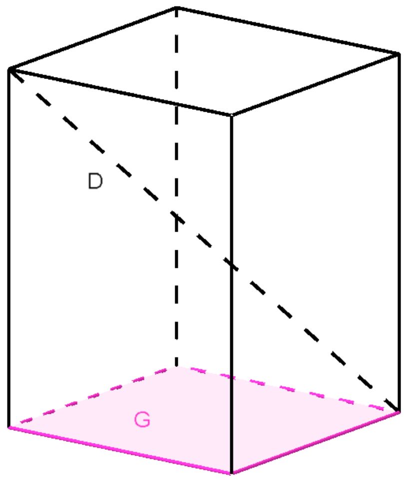
Volumen: $V = G \cdot h$, Oberfläche = $2G + S_1 + ... S_n$

In der Skizze ist die Grundfläche fünfeckig, also gibt es $n = 5$ Seitenflächen.

Wird die Grundfläche senkrecht verschoben, so handelt es sich um ein gerades Prisma. Ein Beispiel für ein gerades Prisma ist ein Spitzdach eines Hauses: die Grundfläche ist dreieckig. Das Prisma liegt.

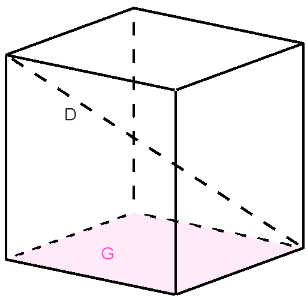
Quader

Ein Quader ist ein besonderes gerades Prisma: die Grundfläche ist ein Rechteck. Sind die Seitenlängen a und b und die Höhe $h = c$, so ergeben sich die gewohnten Formeln:
Volumen $V = G \cdot h = abc$ und
Oberfläche $S = 2ab + 2bc + 2ac$.
Für die Raumdiagonale ergibt sich $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Um diese Formel zu erhalten, muss zunächst in der Grundfläche die Diagonale berechnet werden $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dann wird wieder ein rechtwinkliges Dreieck mit der Flächendiagonale d und der Höhe c gebildet.
$D = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

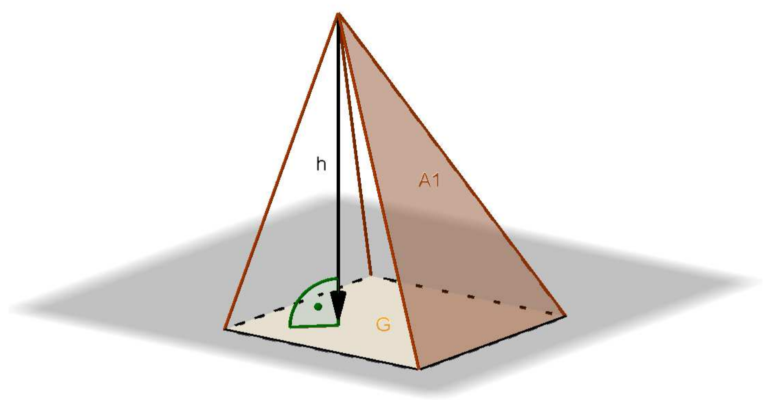


Würfel

Ein Würfel ist ein besonderer Quader: Länge, Breite und Höhe sind gleich gross.
Volumen $V = a^3$, Oberfläche $S = 6a^2$.
Die Raumdidagonale ist $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\sqrt{a^2} = \sqrt{3}a$



Pyramide



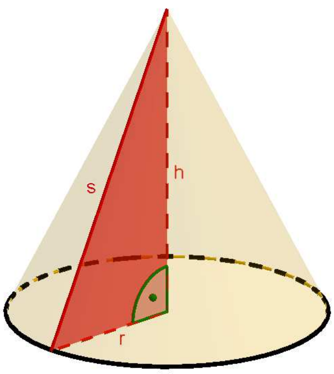
Eine Pyramide entsteht, indem die Eckpunkte eines Vielecks G mit einem Punkt, der Spitze, verbunden werden.

Die Seiten einer Pyramide bestehen also aus Dreiecken, zum Seipiel A_1. Gezeichnet ist eine Besonderheit: eine quadratische Pyramide, also eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Spitze befindet sich allerdings in der Skizze nicht direkt über dem Mittelpunkt des Quadrats – das wäre dann eine gerade quadratische Pyramide – die Cheops-Pyramide in Ägypten ist die wohl bekannteste Vertreterin.

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, Oberfläche = $G + A_1 + \ldots A_n$

Kegel

Ein Kegel entsteht, indem ein Kreis mit einem Punkt, der Spitze, verbunden werden.
Gezeichnet ist hier ein Spezialfall, ein gerader Kegel: die Spitze befindet sich senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises. Für alle Kreiskegel gilt Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
Für die Oberflächenberechnung eines geraden Kreiskegels wird die Mantellinie s benötigt. Ihre Länge berechnet sich mit dem Satz von Pythagoras als $s^2 = r^2 + h^2$.
Für die Oberfläche gilt dann $S = \pi r^2 + \pi rs$.

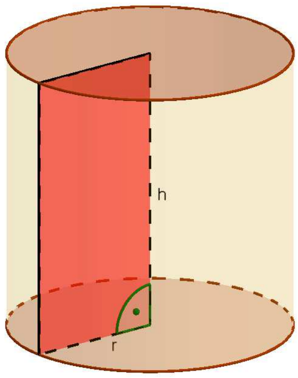


Der zweite Summand in dieser Formel ist die Mantelfläche M. Die Herleitung findet sich zum Beispiel auf Wikipedia:

https://de.wikipedia.org/wiki/Kegel (Mantelfläche ist Kapitel 3.1)

Zylinder

Ein Zylinder entsteht, indem ein Kreis verschoben wird. Der überstrichene Bereich gehört zum Zylinder. Damit gilt für das Volumen
Volumen $v = \pi r^2 h$
Gezeichnet ist rechts ein Spezialfall, ein gerader Kreiskegel. Hier gilt für die Oberfläche $S = 2\pi r^2 h + 2\pi rh$



Kegelstumpf und Pyramidenstumpf

Wird bei einer Pyramide oder einem Kegel parallel zur Grundfläche ein Schnitt durchgeführt, und nur der untere Teil bleibt bestehen, so ergibt sich ein Stumpf. Dessen Volumen und Oberfläche lassen sich berechnen, indem die Anteile des oberen Teils vom Gesamten abgezogen werden.

Kugel

Eine Hohlkugel besteht aus allen Punkten, die von einem Mittelpunkt den gleichen Abstand r haben. Werden auch die inneren Punkte mit betrachtet, so handelt es sich um eine Vollkugel. Wird nur von einer Kugel gesprochen, so muss aus dem Kontext klar werden, ob Hohl- oder Vollkugel gemeint sind.

Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, Oberfläche $S = 4\pi r^2$.

(Die Herleitung der Volumenformel findet sich zum Beispiel auf
http://www.onlinemathe.de/forum/Herleitung-des-Kugelvolumens)

13.2 Übungen

Diesen Abschnitt verdanke ich Martin Münch. Es ist sinnvoll, mehrere Aufgaben in Ruhe durchzurechnen. Sterne markieren den Schwierigkeitsgrad.

Geben Sie die Ergebnisse jeweils auf zwei Nachkommastellen gerundet an. Ausserdem bei angewandten Aufgaben so, dass es so viele geltende Stellen gibt wie in der Aufgabenstellung.

1. $\star$ Zeichnen Sie ein Schrägbild, berechnen Sie das Volumen, die Oberflächen und die Gesamtlänge der Kanten für einen Quader mit den Seitenlängen

   a) 5.2 cm, 3.6 cm and 1.8 cm

   b) 6.8 cm, 5.0 cm and 4.0 cm

   c) 4.8 cm, 4.8 cm and 3.3 cm

2. $\star$ Zylinderförmige Glasgewässe haben eine gewisse Glasdicke. Der Aussendurchmesser des Glases ist also kleiner als der Innendurchmesser, in den die Flüssigkeit passt. Die Gefässe hier haben eine Glasdicke von 1mm und sie fassen 1 Liter. Berechnen Sie den Aussendurchmesser. Die Gefässe haben eine Höhe von

   a) 9 cm task 10 cm task 11 cm
   task 12 cm

3. $\star$ An einem Messzylinder mit genormtem Innendurchmesser von 86 mm sollen Messstriche angebracht werden.

   a) Berechnen Sie, in welchem Abstand sich die Markierungen für jeweils 50 cm^3 befinden müssen.

   b) In welcher Höhe liegt der Messtrich für 1 Liter?

4. ⋆ Die Pyramide beim Eingang zum Louvre in Paris (Abb. 13.1) ist 21.6 m hoch. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit der Fläche 1169.64 m^2. Wie gross ist das Volumen der Pyramide und die Seitenlängen der Grundfläche?

Abb. 13.1: Die Pyramide vor dem Louvre in Paris

5. ⋆⋆ Die berühmteste Pyramide ist die Cheopspyramide bei Gizeh in Ägypten (Abb. 13.2).

a) Berechnen Sie ihren ursprünglichen Rauminhalt auf m^3 genau, wenn ihre Höhe einst 146.5 m betrug und die (tatsächlich vorhandenen) Hohlräume nicht berücksichtigt werden.

b) Wie viele Kalksteinblöcke mit dem Volumen 1.1 m^3 benötigte man?

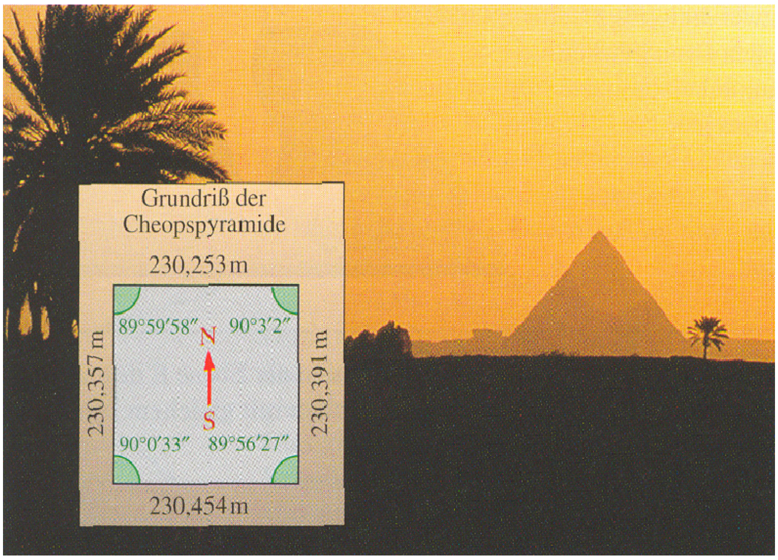


Abb. 13.2: Cheopspyramide bei Gizeh

6. ⋆ ⋆ ⋆ Um wie viel Prozent nehmen das Volumen V und der Mantel M eines senkrechten Zylinders mit Radius r und Höhe h zu bei Vergrösserung

a) von r um 20 %

b) von h um 20 %

c) von r und h um je 20 %

7. ⋆ ⋆ Ein rechteckiges Blatt mit den Seiten a und b kann auf zwei Arten zu einem Zylinder gebogen werden. Sind die beiden Rauminhalte gleich gross?

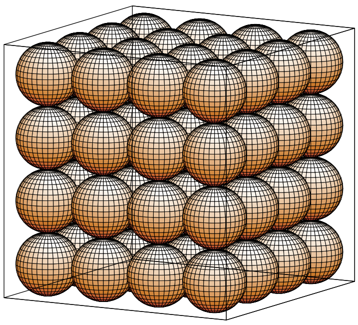
8. ⋆ Ein runder Turm mit 15 m Umfang hat ein 6.5 m hohes Kegeldach. Bestimmen Sie die Fläche des Daches und das Volumen des Dachraumes.

9. ⋆ ⋆ Wie schwer ist ein Stück Kupferrohr (Hohlzylinder) mit Aussendurchmesser 21 mm, 1.5 mm Wanddicke und 650 mm Länge (Dichte ρ_{Ku} = 8900 kg m^{-3} = 8.90 g cm^{-3})?

10. ⋆ ⋆ ⋆ Ein kegelförmiger Messbecher soll 0.6 l fassen und innen 10 cm hoch sein. Welchen inneren Durchmesser muss der Messbecher oben haben?

11. Ein kugelförmiger Gasballon mit 36 m Durchmesser soll einen neuen Stoffüberzug erhalten. Wie viel Stoff benötigt man?

12. Ein Würfel mit 10 cm Kantenlänge wird mit gleich grossen Kugeln gefüllt. Wie gross ist die Gesamtoberfläche der Kugeln? Im Beispiel werden pro Höhe, Breite und Tiefe je vier Kugeln angeordnet.



a) Bei einer Kugel im Würfel?

b) Bei zwei Kugeln nebeneinander?

c) Bei vier Kugeln nebeneinander, wie im Beispiel rechts?

d) Der Kugeldurchmesser wird fortlaufend halbiert. Mit welchem Faktor ändert sich die Anzahl der Kugeln? Mit welchem Faktor ändert sich ihre Gesamtoberfläche?

e) Die Lunge des Menschen besteht aus rund 1.6 Mrd Bläschen; jedes hat einen Durchmesser von ca. 0.2 mm. Berechnen Sie schrittweise die Oberfläche: Zunächst von einem Bläschen, dann von allen 1.6 Mrd . Geben Sie die Gesamtoberfläche in m^2 an.

13. 200 m Kupferdraht wiegen 5.54 kg. Wie dick ist der Draht? (Dichte von Kupfer selbst herausfinden)

14. Ein hölzerner Spielzeugkegel ist 144 g schwer und hat einen Durchmesser d von 8 cm und eine Höhe von 18 cm. Wie gross ist die Dichte des Holzes? Um welches Holz könnte es sich handeln (Holzart selbst herausfinden)?

15. Der Mond hat einen Durchmesser von 3474 km, der Mars einen solchen von 6780 km.

a) Wie viele Monde lassen sich aus dem Mars bilden?

b) Wie verhalten sich die Oberflächen zueinander? (Tipp: angeben wie oft mal die S vom Mond in der S vom Mars Platz hat.)

16. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 8 cm lang ist. Wie gross ist das Volumen und die Mantelfläche des Kegels?

17. Familie Meier möchte 500 g Spaghetti kochen. Das Rezept sagt, dass für 100 g Teigwaren 1 l Wasser benötigt wird und dass während dem Kochen 15 % Wasser verloren geht.

a) Wie viel Wasser wird benötigt?

b) Familie Meier hat einen Kochtopf mit $d = 20\,\text{cm}$ ausgewählt. Wie hoch steht das Wasser in dem Topf (bevor die Spaghetti dazugegeben werden)?.

18. Das Volumen einer quadratischen Pyramide beträgt $36.72\,\text{cm}^3$, die Höhe der Pyramide misst $8.5\,\text{cm}$. Berechnen Sie die Längen einer Grundkante, einer Seitenkante und die Oberfläche S.

19. Das Becken eines Hallenbades ist $30\,\text{m}$ lang, $12\,\text{m}$ breit und durchschnittlich $2\,\text{m}$ tief. Wie lange dauert die Füllung des Beckens, wenn in der Minute $600\,\text{l}$ Wasser zufliessen?

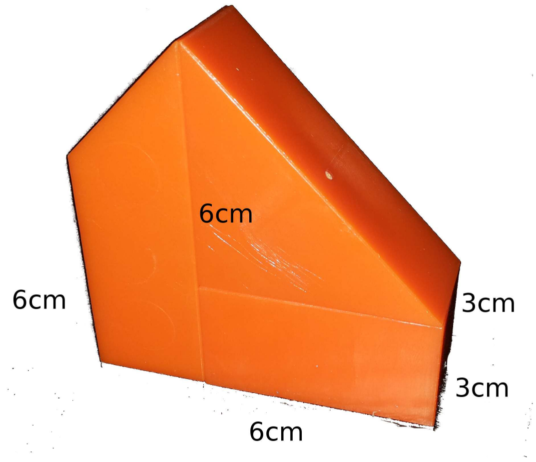
20. Die Decke eines Turmzimmers hat Kegelform ($d = 5.2\,\text{m}$; $h = 2.8\,\text{m}$). Die Wand des Zimmers ist $4\,\text{m}$ hoch. Wie viel kostet der Anstrich von

a) Decke

b) Wand,

wenn für $1\,\text{m}^2$ CHF 12.40 berechnet wird.

21. Torschtli hat mit Bauklötzen gebaut, Herr Tli hat das fotografiert. Die Masse sind eingezeichnet.



Fertigen Sie ein Schrägbild des Körpers an und berechnen Sie sein Volumen.

13.3 Exkurse und Vertiefungen

Auftrag 13.1

Vermessen Sie die Wohnung oder das Haus in dem Sie leben.

a) Berechnen Sie die gesamte Wohnfläche und den Wohnraum.

b) Vergleichen Sie den Wohnraum mit dem Inhalt der Pyramide, welche vor dem Louvre steht.

c) Zeichnen Sie zwei Würfel mit den entsprechenden Volumen (Pyramide - Wohnraum), welche den Grössenunterschied sichtbar machen.

22. Abschlussprüfung Liestal 2015

Ein beliebtes Dessert ist der Mousse au chocolat Stern von Bofrost. Sie besteht aus einem regelmässigen Sechseck, dem jeweils gleichseitige Dreiecke angehängt werden. Die Seitenlänge eines dieser gleichseitigen Dreiecke beträgt 2 cm.

a) Berechnen Sie die Grundfläche des Sterns.

b) Nehmen wir an, dass der Mousse au chocolat Stern eine Höhe von 2 cm hat. Wie gross ist dann sein Volumen

c) Der Hersteller, Bofrost, gibt an, dass 100 g Sterne 236 kcal hergeben. Wie viel Kalorien hat ein Stern, wenn seine Dichte $\rho = 4.811\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt?

23. Abschlussprüfung Oberwil 2015

Zu bestimmen ist das Volumen der Süssigkeitenverpackung.

Gezeigt wird die Verpackung in Frontalansicht und von oben.

Die Höhe der Verpackung beträgt 14.5 cm. Die Grundfläche und die obere Fläche der Verpackung haben die folgenden Abmessungen:

- die sechs kurzen Kanten sind jeweils 2.5 cm lang.
- die längeren Kanten sind 6.7 cm lang
- Die Innenwinkel betragen jeweils 90 + 45 = 135 Grad.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Deckfläche.

Sollten Sie kein Ergebnis erhalten, rechnen Sie für die weiteren Teilaufgaben mit 64.38 cm^2.

b) Wie gross ist das Volumen der Verpackung?

c) In der Verpackung sind 16 Schokokugeln enthalten. Diese haben einen Durchmesser von je 2.2 cm. Wieviel Prozent des Volumens der Verpackung nehmen die Schokokugeln ein?

d) Zeichnen Sie den Boden der Verpackung *in Originalgrösse*. Zeigen Sie, wie sich möglichst viele Schokokugeln nebeneinander auf dem Boden der Verpackung platzieren lassen. Mit Vorteil arbeiten Sie dabei mit einer 20 Cent-Münze

14 Lösungsverzeichnis