M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Quadratische Gleichungen und Funktionen

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

6. Juli 2023

10 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Was passiert eigentlich, wenn x ein Quadrat hat? Wir beginnen nun mit der Algebra mit x^2. Zu Beginn werden die binomischen Formeln repetiert, beispielsweise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Es wird eine Technik zum Lösen von Gleichungen mit Quadraten eingeführt, das quadratische Ergänzen.

Dann werden Funktionen und Graphen mit x^2 untersucht. Bislang kennen Sie Funktionen der Form $y = ax+b$. Deren Graphen sind Geraden. Was ändert sich nun?

Schliesslich werden wieder Gleichungen mit x^2 untersucht, quadratische Gleichungen. Aus dem quadratischen Ergänzen und den quadratischen Funktionen ergibt sich damit eine Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

10.1 Vorübung: Einsetzen in Terme

Im Kapitel «Quadratische Funktionen und Gleichungen» ist es oft wichtig, in Terme korrekt einzusetzen. Das soll vorab geübt werden.

1. Setzen Sie, ohne Taschenrechner, für x die Zahlen 2, -3, 0 und 0.5 in den Term ein.

Achten Sie auf: Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung. Also $3 \cdot 2 + 4^2 = 22$. Und auch $-(-3)^2 = -9$. Insbesondere ist $-x^2$ negativ, wenn eine positive Zahl eingesetzt wird.

	2	-3	0	0.5
a) $x^2 + 5x + 6$				
b) $x^2 - 5x + 6$				
c) $x(x + 3)$				
d) $-x^2 + 2x + 4$				
e) $0.5x^2 + 5x + 6$				
f) $-0.5x^2 - 5x - 6$				
g) $-0.5x^2 - 5x + 6$				
h) $(0.5x + 2)(0.5x - 2)$				
i) $0.5x^2 + 2.5x + 3$				
j) $(x - 2)(x + 3)(2x + 1)$				
k) $(-2x - 2)(x^2 + 2x + 3)$				
l) $0.1x^2 - 0.1x - 0.1$				
m) $-3x^2 - x - 4$				

2. Formulieren Sie nun einige Dinge, die Ihnen aufgefallen sind. Worauf ist zu achten?

3. Die Regel Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung ist mit dem Taschenrechner nicht ganz einfach umzusetzen. Vollziehen Sie einige der Rechnungen mit dem Taschenrechner nach.

4. Hier geht es um Terme mit drei Unbekannten. Setzen Sie die für x, a und b jeweils -1 und 2 ein. Das gibt 8 Einsetzungen pro Aufgabe. M

	$x = -1; a = -1; b = -1$	-1;-1;2	-1;2;-1	-1;2;2	2;-1;-1	2;-1;2	2;2;-1	2;2;2
$ax^2 + bx + 1$								
$x^2 + ax + b$								
$(x - a)(x - b)$								

10.2 Malkreuze und Flächen

Eine typische Rechnung in der Algebra ist

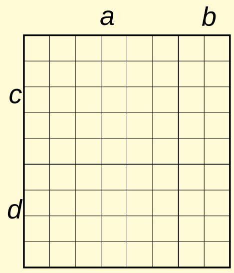
$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd \tag{10.1}$$

In diesem Abschnitt geht es um eine geometrische Interpretation der Formel (10.1). Dabei wird klar, wie sich obiges Ergebnis begründen lässt. Schönes Nebenprodukt sind die binomischen Formeln.

10.2.1 Malkreuzrechnungen

Auftrag 10.1

Im Rechteck links ist
$a = 6$, $b = 2$, $c = 5$ und $d = 4$.
Die vier Teilflächen und die Gesamtfläche lassen sich durch die folgenden vier Multiplikationen am Malkreuz veranschaulichen.



$\cdot$	6	2	
5			
4			
			72

Füllen Sie zunächst die Felder im Malkreuz aus – und markieren Sie farblich gleich im Rechteck und im Malkreuz welche Ergebnisse zu welchen Flächen passen.

Überlegen Sie sich mit Hilfe der Beziehung von Rechteckfläche und Malkreuz, dass die Formel (10.1) gilt – und wie Sie das einem Achtklässler erklären könnten.

Weitere Beispiele können helfen.

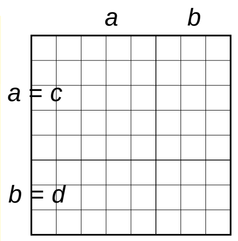
Formulieren Sie dann die Begründung für den Achtklässler. Gegebenenfalls auch mit Hilfe von Skizzen.

Auftrag 10.2

Ein Spezialfall des letzten Auftrags. Hier ist $a = c = 5$ und $b = d = 3$. Erklären Sie damit die erste binomische Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

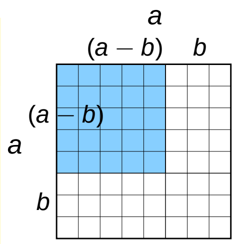
Wieder müssen Sie sich die Beziehung der Flächen der Teilrechtecke und der Multiplikation der Variablen klar machen.



Auftrag 10.3

Hier sind die Bezeichnungen anders: a ist jetzt die Kante des grossen Quadrats, das linke obere Quadrat (gefärbt) hat also die Fläche $(a - b)^2$.
Erklären Sie damit die zweite binomische Formel:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



10.2.2 Rechnen mit binomischen Formeln

5. Berechnen Sie, verwenden Sie keinen Taschenrechner

a) $(100 + 1)^2$
b) $(2 + 0,4)^2$
c) 69^2
d) $(c - 2d)^2$
e) $(-8m - 7)^2$
f) $(-8q - 1)(8q - 1)$
g) $(-a + b)^2$
h) $(-a - b)^2$
i) $(2a + 16)^2$
j) $(xy - yz)^2$
k) $(2x + 5)(2x - 5)$
l) $(9uv^2 - 1)(9uv^2 + 1)$
m) $(z^2 + 3z)^2$

6. Stimmen die folgenden Gleichungen für alle Einsetzungen?

a) $(x + y)^2 = (-x - y)^2$
b) $(n - 1)^4 = (1 - n)^4$
c) $(a + b)^3 = -(-a + b)^3$
d) $(u^2 - v^2)^5 = -(v^2 - u^2)^5$

7. Stellen Sie unter Verwendung einer binomischen Formel als Produkt dar

a) $9q^2 - 6q + 1$ b) $16m^2 - 9n^2$ c) $25x^2 - 1$

d) $5a^2 - 10ab + 5b^2$ e) $36u^2 + 60uv + 25v^2$ f) $4c^2 - 9d^2$

g) $6a^2 - 6b^2$ h) $q^2r^2 - 4qr + 4$ i) $16r^2 - 24rs + 9s^2$

j) $4c^2 + 28cd + 49d^2$

8. Zerlegen Sie, wenn möglich, den Term mit Hilfe von binomischen Formeln so weit wie möglich. Verändern Sie andernfalls einen Summanden so, dass der Term zu einer binomischen Formel wird.

a) $8x^2 - 24x + 18$ b) $2x^2 - 18$ c) $x^2 + 16$

d) $75x^2 - 60x + 48$ e) $4x^2 - 12x + 9$ f) $5x^2 - 5$

10.3 Quadratische Ergänzung

Gleichungen mit binomischen Formeln können leicht gelöst werden. $(x + 3)^2 = 0$ hat einfach die Lösung $x = -3$. Bereits $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) = 0$ hat zwei Lösungen: $x = -3$ und $x = 3$. Der Umgang mit mehr als einer Lösung wird denn auch einer der Hauptpunkte des Kapitels werden.

9. Lösen Sie mit Hilfe von binomischen Formeln

a) $(x + 4)^2 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 + 32x + 256 = 0$

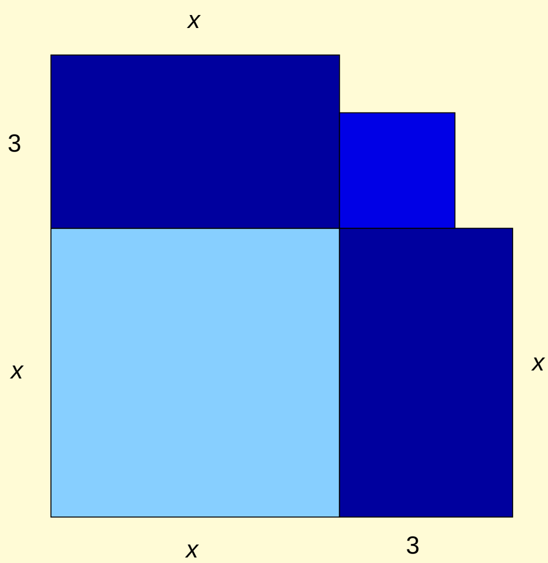
d) $(x + 4)^2 = 4$ e) $(x + 4)^2 = -1$ f) $x^2 + 6x + 4 = 20$

Auftrag 10.4: Quadratisches Ergänzen

Schritt 1 Es geht um die Lösung der folgenden Gleichung:

$$x^2 + 6x + 4 = 20$$

Zeigen Sie, dass die Ausdrücke auf der rechten Seite im Bild wiederzufinden sind.
Sie wissen, dass sich binomische Formeln durch quadratische Flächen darstellen lassen. Welche Zahl muss auf der linken Seite addiert werden, damit die Fläche zu einem Quadrat wird?
Überlegen Sie sich, wie das bereits in der Aufgabe 9, Teil f, g und h algebraisch durchgeführt wurde.



Vorsicht: die Graphik liefert nur eine von zwei Lösungen. t^2=25 hat zwei Lösungen, 5 und -5. Das führt auch bei der vorliegenden Gleichung zu zwei Lösungen - aber die eine Lösung lässt sich nicht als Fläche interpretieren. Algebraisch lässt sich die zweite Lösung aber meist recht schnell bestimmen.

Schritt 2 Lösen Sie nach dem gleichen Schema (Addition, so dass eine Wurzel gezogen werden kann) die folgenden Aufgaben. Bedenken Sie, dass es meist zwei Lösungen gibt.

a) $x^2 + 6x + 2 = 29$ b) $x^2 + 10x + 5 = 29$ c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

d) $x^2 + 6x + 7 = 0$ e) $x^2 + 16x + 3 = 0$ f) $x^2 - 6x + 6 = 0$

(Schauen Sie sich noch einmal die Graphik an um zu verstehen, warum der Term in der Mitte ($6x$ bzw $16x$ bzw $-6x$) halbiert werden muss.)

Schritt 3 Erklären Sie in eigenen Worten, mit Beispiel und Skizze, wie das Lösen einer quadratischen Gleichung mit quadratischem Ergänzen vor sich geht.

Schritt 4 Jetzt sind wir eigentlich fertig. Sie sollten nun die Gleichung $x^2 + 7x - 11 = 0$ lösen können, indem Sie zu einem Quadrat ergänzen.

Schritt 5 Sie haben in Aufgabe 9, Teil e gesehen, dass es quadratische Gleichungen gibt, die nicht lösbar sind. Jetzt sollen Sie die Lösbarkeit bei der Technik des quadratischen Ergänzens betrachtet werden. Sie dürfen sich dabei beschränken auf Gleichungen, die mit $x^2 + 6x$... beginnen. Nach dem Ergänzen zu einem Quadrat ist bereits zu erkennen, ob es eine Lösung gibt. Oder zwei. Oder keine. In dieser Aufgabe brauchen Sie die Gleichungen nicht zu lösen. Sie sollen nur möglichst schnell in Ihrer Rechnung sagen, wie viele Lösungen es gibt.

a) $x^2 + 6x + 7 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$ c) $x^2 + 6x + 10 = 0$

d) $x^2 + 6x - 3 = 0$ e) $x^2 + 6x + 42 = 0$

Schritt 6 Etwas allgemeiner: Alle Gleichungen im Schritt 7 sind von der Form $x^2 + 6x + q = 0$. Welche Bedingung muss q erfüllen, damit die Gleichung eine, zwei oder keine Lösung hat? Formulieren Sie Ihre Antwort mit Variablen, begründen Sie die Antwort mit einer Graphik.

10.3.1 Vertiefung quadratisches Ergänzen

Dieser Abschnitt wurde einem Leitprogramm von Marco Bettinaglio et al, ETH Zürich 1995 (http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/quadr_gleich) entnommen. Auch in den folgenden Abschnitten des Kapitels stammen einige Aufgaben und Texte aus diesem Leitprogramm.

Nun haben Sie die Technik der quadratischen Ergänzung gelernt. Im Beispiel:

> *D*er Vorgang, der von der Gleichung
>
> $$x^2 + 7x - 11 = 0$$
>
> zur Gleichung
>
> $$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = 23.25$$
>
> führt, heisst *Quadratisches Ergänzen.*

Jetzt müssen Sie die wichtigste Technik der nächsten Wochen noch üben.

10. Ergänzen Sie die folgenden Ausdrücke zu einem Quadrat. Welche Zahlen müssen Sie jeweils dazuzählen?

a) $x^2 + 4x$ b) $u^2 - 6u$

c) $y^2 - \frac{2}{3}y$ d) $k^2 + 10k$

11. Lösen Sie die angegebenen Gleichungen mit quadratischem Ergänzen.

a) $x^2 + 4x = 12$ b) $z^2 - 6z + 2.75 = 0$

c) $a^2 - 1.8a + 0.81 = 0$ d) $x^2 - x = 0$

12. Die folgenden Gleichungen müssen Sie zunächst umformen, damit vor der Variable im Quadrat keine Zahl mehr steht.

a) $2x^2 + 8x + 8 = 0$ b) $-3x^2 + 18x - 27 = -12$

c) $4x^2 - 8x = -4$ d) $-z^2 - 2z - 1 = 0$

13. a) Mit welcher Zahl können Sie den Ausdruck $p^2 - 16p$ zu einem Quadrat ergänzen?

b) Wie gross ist die quadratische Ergänzung des Ausdrucks $a^2 + 10a$?

14. Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen?

a) $y^2 - 4y + 4 = 9$ b) $-3c^2 + 12c - 12 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 3$ d) $x^2 + 10x + 25 = 12$

Nun sind Sie in der Lage, eigentlich alle quadratischen Gleichungen zu lösen, mit der Methode des quadratischen Ergänzens. Im übernächsten Kapitel wird das weiter systematisiert, mit einer Lösungsformel. Eingeschoben wird ein Abschnitt zu Funktionen, der die Lösungsformel gut begründet.

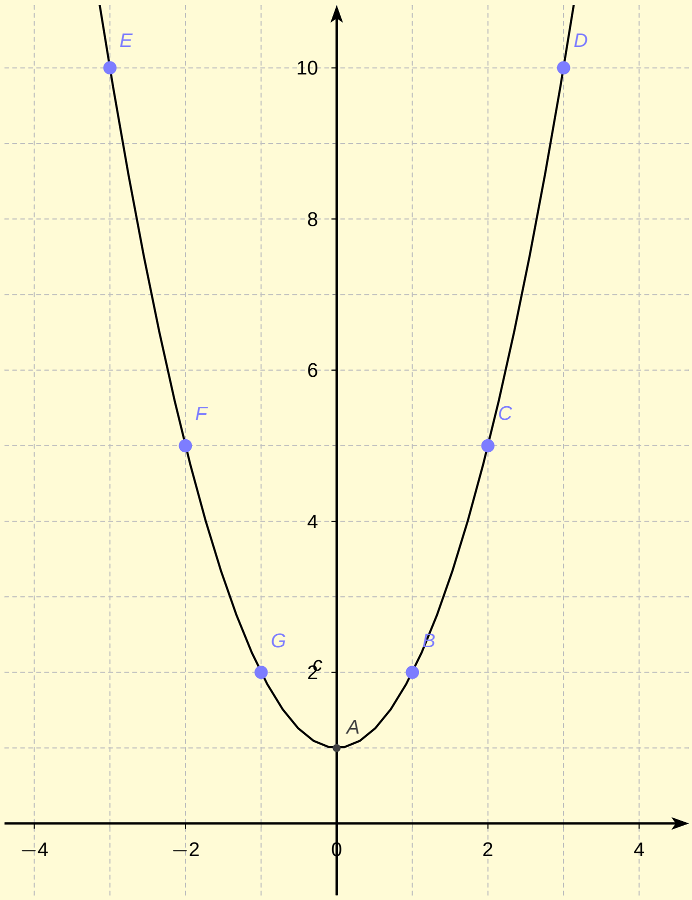
10.4 Quadratische Funktionen

10.4.1 Parabeln

Auftrag 10.5

Gegeben ist hier eine Wertetabelle. Die Werte werden in ein Koordinatensystem übertragen und durch eine Kurve sinnvoll verbunden.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10



Die Einträge in der zweiten Zeile der Tabelle sind jeweils das Quadrat der ersten Zeile, plus 1. Die Funktionsgleichung ist $y = x^2 + 1$. Zeichnen Sie analoge Skizzen mit den folgenden Wertetabellen. Stellen Sie Funktionsgleichungen $y = \ldots$ auf. Welche Zusammenhänge erkennen Sie zwischen den verschiedenen Graphen und den verschiedenen Funktionsgleichungen? Formulieren Sie Ihre Erkenntnisse.

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	6	3	2	3	6	11

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

d)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	13.5	6	1.5	0	1.5	6	13.5

e)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9	16

f)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	16	9	4	1	0	1	4

Auftrag 10.6

a) Installieren und öffnen Sie die App «Geogebra Graphikrechner». Geben Sie $y = x^2$ in die Eingabezeile ein.

Verschieben Sie den Graphen und beobachten Sie, wie sich der unterste Punkt des Graphen verschiebt. Suchen Sie nach einem Zusammenhang zwischen der Funktionsgleichung und dem untersten Punkt.

b) Nun soll untersucht werden, wie der Graph schmaler und breiter gemacht werden. Versuchen Sie es mit den folgenden Funktionsgleichungen im Geogebra Graphikrechner und formulieren Sie wieder eine Erkenntnis. Sie sollten die Graphen diesmal nicht verschieben.

$y = x^2$; $y = 0.5x^2$ $y = 2x^2$; $y = 1.5x^2$; $y = -0.5x^2$, $y = -2x^2$

c) Verschieben Sie nun die Graphen der letzten Aufgabe, und sehen Sie, was mit der Funktionsgleichung passiert. Was ändert sich nicht?

Definition 10.1

Quadratische Funktionen sind Funktionen, die sich durch Gleichungen der Form $y = ax^2 + bx + c$ beschreiben lassen. Für x lassen sich Zahlen einsetzen. a, b und c stehen für konkrete Zahlen, wobei $a \neq 0$ gilt.

Beispiel 10.1

a) In $y = 2x^2 + 3x + 4$ ist $a =$ _, $b =$ _, $c =$ _

b) In $y = x^2 + 3x + 4$ ist $a =$ _, $b =$ _, $c =$ _

c) In $y = x^2 + 4$ ist $a =$ _, $b =$ _, $c =$ _

d) In $y = 2x^2$ ist $a =$ _, $b =$ _,$c =$ _

e) In $y = 2x^2 + x$ ist $a =$ _, $b =$ _, $c =$ _

f) In $y = 2x^2 + x - 3$ ist $a =$ _, $b =$ _,$c =$ _

g) In $y = -2x^2 - x + 4$ ist $a =$ _, $b =$ _, $c =$ _

Definition 10.2

Die Graphen von quadratischen Funktionen nennen sich Parabeln, der Graph von $y = x^2$ nennt sich Normalparabel. Der oberste, bzw unterste Punkt nennt sich Scheitelpunkt.

Satz 10.1

Alle Parabeln lassen sich durch Streckungen und Verschiebungen aus der Normalparabel erhalten.

Dabei regelt a:

Ist a=1 so liegt der Scheitelpunkt bei x =

Ist a nicht 1, so liegt der Scheitelpunkt bei x =

Der Parameter c regelt.

Beispiel 10.2

Der Scheitelpunkt von $y = 3x^2 + 12x + 11$ liegt bei $x = -2$ und $y = 3(-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 10 = -1$

10.4.2 Die Scheitelform

Die Darstellung von quadratischen Funktionen ist noch nicht recht befriedigend: Die Öffnung a ist schon gut sichtbar, der Scheitelpunkt aber nicht. Hier hilft die Scheitelform.

Auftrag 10.7

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen. Wo liegt jeweils der Scheitelpunkt? Achtung, Geogebra multipliziert den Term gleich aus. Aus $y = 3(x - 2)^2 + 4$ wird $y = 3x^2 - 12x + 16$.

a) $y = 0.5(x - 1)^2 + 4$

b) $y = 2(x - 2)^2 + 2$

c) $y = -0.5(x + 1)^2 + 3$

d) $y = (x + 3)^2 + 1$

e) $y = -(x + 2)^2 - 2$

f) $y = 8(x - 16)^2 + 32$

Definition 10.3

Eine Funktionsgleichung der Form $y = a(x - u)^2 + v$ heisst *Scheitelform* der quadratischen Funktion.

Eine Funktionsgleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ heisst *Normalform*

Vorsicht, beim u steht ein Minuszeichen.

Beispiel 10.3

a) In $y = 2(x - 3)^2 + 4$ ist a =, u = _ und v = _

b) In $y = 2(x + 3)^2 + 4$ ist a =, u = _ und v = _

c) In $y = 2(x - 3)^2 - 4$ ist a =, u = _ und v = _

d) In $y = (x - 3)^2 + 4$ ist a =, u = _ und v = _

e) In $y = 2x^2 + 4$ ist a =, u = _ und v = _

f) In $y = 2x^2$ ist a =, u = _ und v = _

Satz 10.2

Der Scheitelpunkt des Graphen einer quadratischen Funktion $y = a(x - u)^2 + v$ ist ...

Beispiel 10.4

Lesen Sie die folgenden Punkte aufmerksam durch und ziehen Sie die Gedankenschritte alle nach. Bei Fragen wenden Sie sich bitte unbedingt an Ihre Lehrperson.

a) Die Funktion $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ ist nach oben geöffnet, hat die gleiche Öffnung wie die Parabel $f(x) = 2x^2$, und den Scheitelpunkt $S\,(3/5)$. Sie ist schmaler als die Normalparabel.

b) Die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$ ist nach unten geöffnet, hat die gleiche Öffnung wie die Parabel $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, und den Scheitelpunkt $S\,(-2/-4)$. Sie ist breiter als die Normalparabel.

c) Die Parabel $f(x) = 2(x-3)^2+5$ kann durch Ausmultiplizieren von der Scheitelpunkt- in die Normalform gebracht werden. Also $f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5$, somit ist die Normalform $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

Der Scheitelform lässt sich der Scheitelpunkt also gut ansehen. Wird das Ausmultiplizieren wieder rückgängig gemacht, so lässt sich auch in der Form des letzten Kapitels der Scheitelpunkt berechnen:

Satz 10.3

Der Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ ist

$$u = -\frac{b}{2a} \text{ und } v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Es gilt also

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Der Beweis besteht aus geschickten algebraischen Umformungen und wird hier weggelassen.

Beispiel 10.5

Der Scheitelpunkt von $y = 3x^2 + 12x + 11$ liegt bei $u = -\frac{12}{2\cdot 3} = -2$ und $v = \dfrac{-12^2 + 4\cdot 3\cdot 11}{4\cdot 3} = -1$

10.4.3 Übungen

15. Welches ist der Scheitelpunkt der folgenden Parabeln?

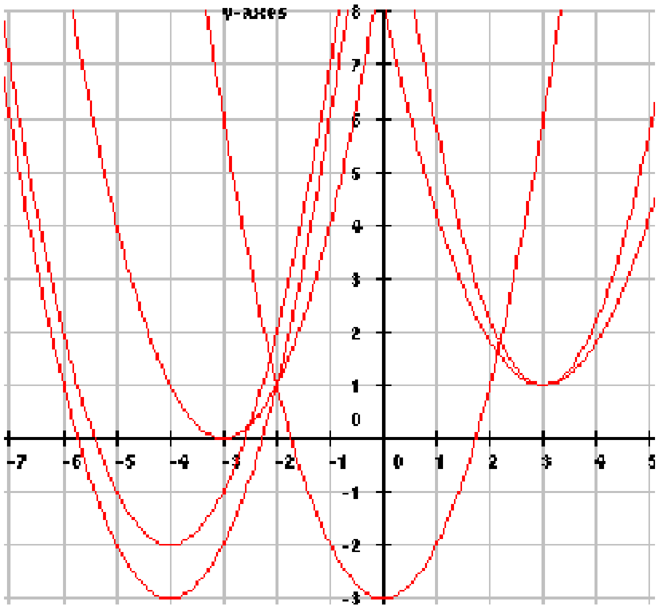
a) $f(x) = (x+2)^2 + 3$ b) $f(x) = (x-7)^2 + 9$ c) $f(x) = x^2 - 9$

d) $f(x) = 3(x-3)^2$ e) $f(x) = x^2 + 14x + 49$

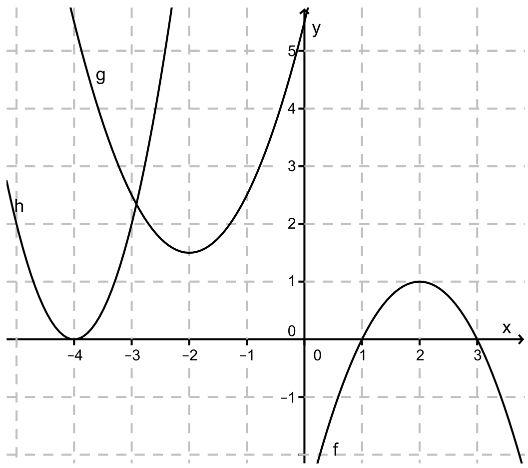
16. Hier sind einige Parabeln gezeichnet. Daneben stehen Funktionsgleichungen. Entscheide, welche Parabeln zu welcher Funktion gehören.

$a(x) = 0.8(x-3)^2 + 1$
$b(x) = 1.2(x-3)^2 + 1$
$c(x) = (x+3)^2$
$d(x) = x^2 + 8x + 14$
$e(x) = (x-4)^2 - 2$
$f(x) = x^2 + 8x + 13$

Vorsicht, nicht zu jeder Funktion muss es eine Parabel geben und umgekehrt.

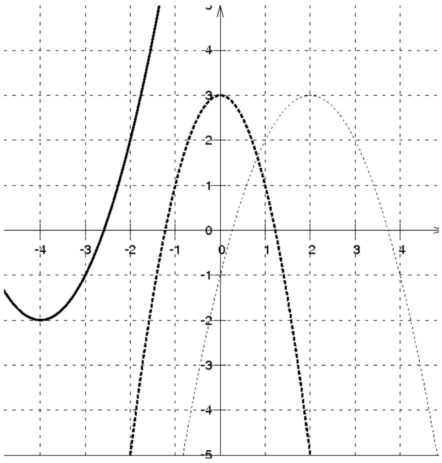


17. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der gezeichneten Graphen. (Sie dürfen entscheiden, ob Sie die Gleichungen in Normal- oder Scheitelform darstellen möchten.)



18. Notieren Sie die Funktionsgleichungen der gezeichneten Graphen.

19. Zeichnen Sie in das Koordinatensystem die folgende Funktion ein. $f(x) = -2x^2 + 3x - 1)$



20. Wir starten bei einer Normalparabel und führen nacheinander Operationen durch. Machen Sie eine Skizze! Geben Sie jeweils die Scheitelpunkts- und auch die Normalform der neuen Parabel an.

a) Verschieben Sie die Parabel um 2 Einheiten nach oben.

b) Spiegeln Sie die verschobene Parabel an der y-Achse.

c) Verschieben Sie die gespiegelte Parabel um 3 Einheiten nach rechts.

21. Wie Aufgabe 20

a) Verschieben Sie die Normalparabel um 4 Einheiten nach rechts.

b) Verschieben Sie die Parabel um 5 Einheiten nach oben.

c) Spiegeln Sie die Parabel an der x-Achse.

22. Wie Aufgabe 20

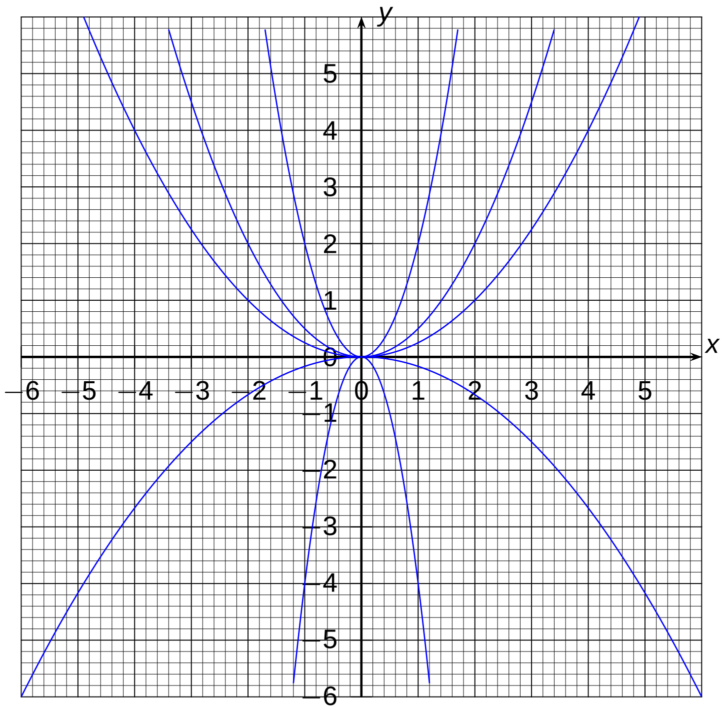
a) Strecken Sie die Normalparabel vertikal um den Faktor 3.

b) Verschieben Sie die Parabel um 5 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach oben.

c) Spiegeln Sie die Parabel an der Gerade $x = -2$.

d) Spiegeln Sie die Parabel am Ursprung.

23. Alle Parabeln in der Abbildung haben den Scheitelpunkt S im Ursprung des Koordinatensystems. Alle Parabeln haben also die Form $f(x) = ax^2$. Finden Sie die Funktionsgleichung aller Parabeln. Tipp: einen Punkt P ablesen und mit S vergleichen!



24. Bringen Sie die Gleichung auf die Scheitelform und geben Sie den Scheitelpunkt an.

a) $a(x) = x^2 + 2x - 3$ b) $b(x) = x^2 - 3x + 7$ c) $c(x) = -4x^2 + 28x + 32$

d) $d(x) = x^2 + x$ e) $e(x) = 2x^2 + 8x - 1$ f) $f(x) = -0,5x^2 + 6x - 7$

g) $g(x) = 1/3x^2 + 2x + 4$ h) $h(x) = x^2 + 4x$

10.4.4 Exkurs: Bestimmung von Parabelgleichungen

Definition 10.4

Die Nullstellen einer Funktion $f(x)$ sind diejenigen x, für die gilt $f(x) = 0$.

Beispiel 10.6

- Die Nullstellen von $f(x) = x^2 + 6x + 8$ sind -2 und -4. (quadratisches Ergänzen mit 1).
- Die Nullstelle von $f(x) = 2x + 4$ ist -2.

25. Welches sind die Nullstellen und Scheitelpunkte der Funktionen

a) $a(x) = x^2 + 5x + 6$ b) $b(x) = 3x^2 + 9x - 30$

c) $c(x) = x^2 + 4x + 4$ d) $d(x) = x^2 + 4x + 5$

26. Finden Sie eine quadratische Funktion mit den Nullstellen

a) 3 und 4 b) -3 und 5 c) 2 und –2

d) 2 und keine weitere e) ohne Nullstellen.

Beispiel 10.7

Bestimmung von v bei $f(x) = 2(x-3)^2 + v$, wobei der Graph durch (2|4) geht. Also ist v noch zu bestimmen. Einsetzen des Punktes: $4 = 2(2-3)^2 + v = 2(-1)^2 + v = 2 \cdot 1 + v = 2 + v$, also $v = 2$

27. Bestimmen Sie die Gleichung $y = a(x-u)^2 + v$ einer Parabel so, dass sie den Scheitelpunkt (2|4) hat und durch den angegebenen Punkt geht.

a) (1|3) b) (4|12)

28. Bestimmen Sie die Gleichung einer Parabel $y = x^2 + bx + c$ so, dass sie durch die Punkte P und Q geht. Berechnen Sie ferner die Koordinaten des Scheitelpunktes.

a) P(2|–7), Q(–3|8) b)) P(–1|6), Q(4|6) c) P(7|7), Q(–7|–7)

29. Wie viele Punkte müssen vorgegeben werden, damit eine Parabel der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ eindeutig bestimmt ist?

30. Die Parabel mit der angegebenen Gleichung wird so in x-Richtung verschoben, so dass sie durch den Punkt (2|1) geht. Bestimmen Sie die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$.

a) $y = x^2$ b) $y = 4x^2$ c) $y = -x^2 + 4x + 8$

31. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel $y = ax^2 + bx + c$, welche durch die Punkte P, Q und R geht. Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes

a) P(–4|8) Q(0|0) R(10|15) b) P(–2|10), Q(2|10), R(3|20)

Auftrag 10.8

Zur quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 3$ gehört die Gleichung $x^2 + 4x + 3 = 0$.

a) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Funktion und die Lösungen der Gleichung.

b) Finden Sie einen Zusammenhang?

c) Betrachten Sie allenfalls noch für die folgenden Funktionen den Scheitelpunkt und die Lösungen der zugehörigen Gleichungen, um den Zusammenhang zu entdecken.
$g(x) = -x^2 - 14x + 7$ und $h(x) = -x^2 + 4x + 3$

d) Begründen Sie den Zusammenhang mit Hilfe des Graphen einer quadratischen Funktion.

10.5 Quadratische Gleichungen

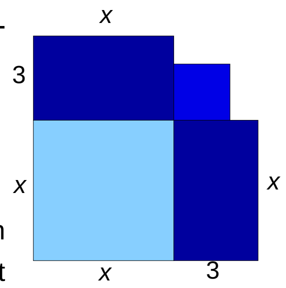
Definition 10.5

Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, die sich auf die Form $ax^2+bx+c=0$ bringen lassen, wobei $a \neq 0$.

Beispiel 10.8

$3x^2+4x=0$ oder $x^2=-4$ oder $(x-2)(x)+2=0$. Die letzte Gleichung muss ausmultipliziert werden, um die Form zu erkennen.

Die versprochene allgemeine Lösungsformel ergibt sich mit Hilfe der quadratischen Ergänzung. Dort war aber $a=1$. Wir teilen also durch a.



$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

Im Bild wird mit $\frac{b}{a}=6$ gearbeitet. Die Hälft des mittleren Terms steht dann links oben und rechts unten im entsprechenden Malkreuz. Mit dem Quadrat von $\frac{b}{2a}$ muss also quadratisch ergänzt werden - der Term kommt bereits beim Scheitelpunkt der Funktion vor.

Wir führen das nun algebraisch, und gleichzeitig an einem Beispiel durch.

Beispiel 10.9

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} 4x^2-8x-12&=0\\ x^2-2x-3&=0\\ x^2-2x&=3\\ x^2-2x+1&=3+1\\ (x-1)^2&=4\\ x-1&=\pm 2 \end{aligned}$$

$x_1=2+1=3$ oder $x_2=-2+1=-1$

Allgemeine Form:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=0\\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}&=0\\ x^2+\frac{b}{a}x&=-\frac{c}{a}\\ x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2&=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

$$x+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ oder } x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Wichtig dabei: $a \neq 0$

Satz 10.4

Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ hat die Lösungen

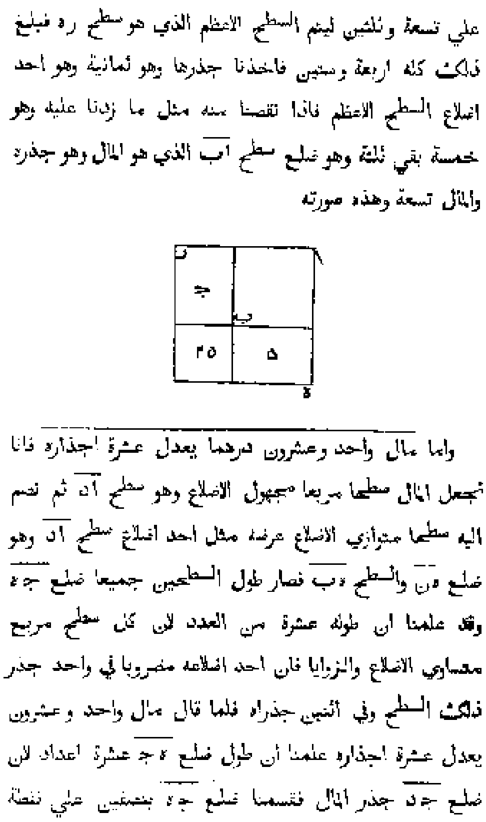
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ist die Wurzel positiv, so gibt es zwei Lösungen. Ist sie Null, so gibt es eine Lösung. Ist der Term unter der Wurzel negativ, so gibt es keine Lösung.

Diese Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist eine der am höchsten geschätzten Gleichungen in der Schulmathematik. Sie steht auf einer Ebene mit dem Satz von Pythagoras und den binomischen Formeln. Sie ermöglicht es, vormals unzugängliche Gleichungen in einem einzigen Zug zu lösen.

Die Algebra verdankt eigentlich dieser Gleichung ihren Namen. Um das Jahr 825 herum veröffentlichte al-Chwarizmi in Bagdad ein Buch, in dem es um das Lösen quadratischer Gleichungen ging.

Das Buch heisst *al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr wal-muqabala* («Das kurzgefasste Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen»). Aus dem mittleren Wort al-gabr wurde dann der Begriff Algebra.


علي تسعة وثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ
ذلك كله اربعة وستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد
اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو
خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره
والمال تسعة وهذه صورته

واما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا
نجعل المال سطحا مربعا مجهول الاضلاع وهو سطح اد ثم نضم
اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح اد وهو
ضلع من والسطح هب فصار طول السطحين جميعا ضلع جه
وقد علمنا ان طوله عشرة من العدد لان كل سطح مربع
متساوي الاضلاع والزوايا فان احد اضلاعه مضروبا في واحد جذر
ذلك السطح وفي اثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون
يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول ضلع هج عشرة اعداد لان
ضلع جد جذر المال فقسمنا ضلع جه بنصفين علي نقطة

Das Bild im Buchausschnitt rechts schlägt den Bogen zurück zu den Malkreuzen am Anfang des Kapitels beim quadratischen Ergänzen, wo wir bx in zwei Teile Teilen mussten. Dort haben wir nur Gleichungen verwendet mit $a = 1$. Damit wird $\frac{b}{2a}$ zu $\frac{b}{2}$. Dieses Halbieren der Zahl beim x zieht sich eigentlich durch das ganze Kapitel. Wir fassen zusammen:

10.5.1 Übungen

32. Lösen Sie folgende Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel.

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$ b) $x^2 + 8x - 9 = 0$

c) $3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $2x^2 - 5x - 42 = 0$

e) $y^2 + 6y + 7 = 0$ f) $2y^2 - 11y - 6 = 0$

g) $y^2 - y - 56 = 0$ h) $z^2 - 13z - 48 = 0$

i) $3z^2 - 4z - 4 = 0$ j) $2z^2 + 9z + 7 = 0$

33. Stellen Sie drei quadratische Gleichungen auf, die keine Lösung haben. Worauf müssen Sie achten?

34. Wieviele Lösungen haben Gleichungen, deren rechte Seite Null ist und deren linke Seite aus

a) einer ersten binomischen Formel besteht, z. B. $x^2 + 16x + 64 = 0$?

b) einer zweiten binomischen Formel besteht?

c) einer dritten binomischen Formel besteht?

35. Sie kennen nun quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen. Was können Sie über den Scheitelpunkt der Funktion aussagen, wenn die Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung bekannt sind?

36. Welche Eigenschaft hat der Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion, wenn die zugehörige Gleichung genau eine Lösung hat?

37. Eine quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt bei $x = 3$. Eine Lösung der zugehörigen quadratischen Gleichung ist $3 + \sqrt{14}$. Wie lautet die andere Lösung?

38. Für welche Zahlen k haben die folgenden Gleichungen keine Lösung, eine Lösung bzw zwei Lösungen?

a) $x^2 - 8x + k = 0$ b) $y^2 + ky + 1 = 0$

39. Lösen Sie, ohne auszumultiplizieren

a) $(x - 8)(5x - 9) = 0$ b) $(3x - 2)(4x + 1) = 0$

c) $(x - 3)(2x - 7) = 0$ d) $(x^2 - 8x + 10)(x - 1) = 0$

10.5.2 Klammeransatz

40. Finden Sie eine möglichst einfache quadratische Gleichung, die die beiden angegebenen Zahlen als Lösung hat. Welche Beziehung besteht zwischen den Koeffizienten und den Lösungen?

a) 6 und 8 b) $-6, -8$ c) $-6, 8$

d) $-2 \pm \sqrt{5}$ e) 0,3

Bedenken Sie nun, dass die Gleichung $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ die Lösungen x_1 und x_2 hat. Wird die Gleichung ausmultipliziert, so erhalten wir $(x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2) = 0$. Oft lassen sich damit Lösungen einer quadratischen Gleichung finden, indem ein Klammeransatz versucht wird. Zur Gleichung $x^2 + 6x + 8 = 0$ suchen wir zwei Zahlen x_1 und x_2, so dass $x_1 + x_2 = -6$ und $x_1 \cdot x_2 = 8$. Die Zahlen -2 und -4 erfüllen diese Bedingung. Also hat die Gleichunb $x^2 + 6x + 8 = 0$ die Lösungen -2 und -4.

41. Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit dem Klammeransatz.

a) $x^2 + 7x + 10 = 0$ b) $x^2 + 5x + 6 = 0$ c) $x^2 - 5x + 6 = 0$

d) $x^2 + x - 6 = 0$ e) $x^2 - 12x + 27 = 0$ f) $x^2 + 6x - 27 = 0$

10.5.3 Textaufgaben und quadratische Gleichungen

42. Ein Blumenbeet von 3m Länge und 2m Breite ist ringsum mit konstanter Breite von Rasen eingefasst, so dass Einfassung und Beet gleichen Flächeninhalt haben. Wie breit ist die Einfassung?

43. Der Umfang eines Rechtecks misst 25m, der Flächeninhalt 25m2. Berechnen Sie die Seiten.

44. Die Seitenlängen eines Rechtecks betragen 8cm und 20cm. Wird die erste um x cm vergrössert und die zweite um ebensoviel verkleinert, so ist der neue Flächeninhalt 60 Prozent des alten. Berechnen Sie die neuen Seitenlängen.

45. Von den drei Kantenlängen eines Quaders ist die mittlere um 2cm grösser als die kleinste und um 3cm kleiner als die grösste. Berechnen Sie die Kanten so, das die Oberfläche 180Quadratzentimeter misst.

46. Werden zwei parallele Seiten eines Quadrates um je 12cm verlängert, so entsteht ein Rechteck, dessen Diagonale 5 Mal so lang ist wie die Quadratdigaonale. Berechnen Sie die Quadratseite.

47. Bei einem Rechteck ist die eine Seite um 3 cm länger als die andere.

a) Bei welchen Seitenlängen ist das Rechteck 180 cm^2 gross?

b) Wie lang sind die Seiten, wenn die Diagonale 15 cm lang ist?

48. In einem Quader mit der Oberfläche 286 cm^2 ist die mittlere Kante 7 cm lang. Sie unterscheidet sich von der grössten Kante ebensoviel wie von der kleinsten. Wie lang sind die Kanten dieses Quaders?

10.6 Exkurs: Verschieben von Gleichungen

Auftrag 10.9

Die folgenden Teilaufgaben lassen sich leicht mit der Lösungsformel lösen. Es gibt aber eine andere Methode, die mit dem Verschieben von quadratischen Funktionen zu tun hat.

Der Teil a) bedarf noch der Lösungsformel, die anderen Teile lassen sich mit Teil a) und geeigneten

Ersetzungen leicht lösen.

a)	$x^2 + 3x - 28 = 0$	b)	$(y-8)^2 + 3(y-8) - 28 = 0$
c)	$\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{z}{2}\right) - 28 = 0$	d)	$(x+2)^2 + 3(x+2) - 28 = 0$
e)	$(10-w)^2 + 3(10-w) - 28 = 0$	f)	$(5x-7)^2 + 3(5x-7) - 28 = 0$

Überlegen Sie sich, wie Sie ihre Art die Aufgabe mit Ersetzung der Variablen zu lösen, der Klasse an der Tafel erklären können. Tun Sie dies auch für die nächsten Aufgaben.

Auftrag 10.10

Vergleichen Sie die Lösungen der Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$ mit denen von

a) $(x+1)^2 - 6(x+1) + 8 = 0$ b) $\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{5}\right) + 8 = 0$

Auftrag 10.11

Die Gleichung $2x^2 + x - 1 = 0$ hat zwei Lösungen. Stellen Sie eine Gleichung auf, deren Lösungen

a)	um 5 grösser	b)	um 4 kleiner	sind.
c)	3-mal so gross	d)	halb so gross	

Auftrag 10.12

Denken Sie sich zu jeder Aufgabe eine ähnliche Aufgabe aus, die Sie dann der Klasse stellen können.

11 Lösungsverzeichnis