M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Potenzen

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

6. Juli 2022

10 Potenzen

10.1 Einführung und Theorie: Potenzrechengesetze

Im letzten Kapitel haben Sie mit Zehnerpotenzen gerechnet, beispielsweise Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise multipliziert. Das Addieren war schwieriger. Die beim Rechnen mit Potenzen geltenden Gesetze sollen nun für beliebige Zahlen ermittelt werden. Es ist schnell einsichtig, warum $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ ist. Das dahinter steckende Rechengesetz, und andere Rechengesetze sollen nun ermittelt werden. Ausserdem soll klar werden, wo mögliche Schwierigkeiten liegen. Zur Einführung, eine kurze Wiederholung der Potenzschreibweise:

Zur Erinnerung: So wie die Multiplikation von natürlichen Zahlen eigentlich bloss eine Abkürzung für eine Addition von lauter gleichen Summenden darstellt:

$$8 \cdot 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 (= 72),$$

so bildet das Potenzieren nur eine Abkürzung für das Multiplizieren von lauter gleichen Faktoren:

Definition 10.1

a^n bedeutet, die Zahl a insgesamt n Mal mit sich selbst zu multiplizieren.
a^n heisst »n-te Potenz von a«. Dabei heisst a Basis und n Exponent.

Beispiel 10.1

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{81}{625} = 0.1296$

c) $(-0.6)^2 = (-0.6) \cdot (-0.6) = 0.36$

Auftrag 10.1

Lesen Sie bitte den Auftrag vollständig durch, bevor Sie zu arbeiten beginnen.

Sie kennen Rechengesetze für das Addieren und Multiplizieren: $a \cdot b = b \cdot a$ und $a + b = b + a$ und $a(bc) = (ab)c = abc$ und $a(b + c) = ab + ac$ und so weiter. Nun sollen Sie Rechengesetze für das Potenzieren selbstständig herausfinden. Es sollten sich Formeln mit a, b als Basis und n, gegebenenfalls m als Exponenten ergeben.

Ordnen Sie die untenstehenden Beispiele danach, ob vergleichbare Situationen vorliegen, und versuchen Sie dann, eine Regel für diese Situation aufzustellen.

Nach den Aufgaben folgt ein Beispiel, wie sortiert werden kann.

Zur Einstimmung stehen hier ein paar Beispiele. Es kommt bei der Bearbeitung nicht auf die Ergebnisse an – sondern darauf, bei der Bearbeitung die allgemeinen Rechengesetze zu erkennen.

a) $10^3 \cdot 10^6$	b) $\left(10^3\right)^2$	c) $10^7 : 10^5$	d) $5^4 \cdot 2^4$
e) $2^3 \cdot 5^3$	f) $2^5 \cdot 5^4$	g) $2^3 + 5^3$	h) $5^2 \cdot 5^3$
i) $2^4 + 5^4$	j) $10^3 : 5^3$	k) $4^5 : 2^5$	l) $\left(2^2\right)^3$
m) $2^{10} : 2^7$	n) $2^7 \cdot 2^3$	o) $\left(5^2\right)^2$	p) $2^5 \cdot 5^5$
q) $2^3 + 2^4$	r) $3^4 = 9^?$	s) $\left(10^{15} : 5^{12}\right) : 2^{15}$	t) $50^5 : 5^5$
u) $7^5 : 7^3$	v) $5^8 = 25^?$	w) $\left(10^5 : 10^2\right) : 10^3$	x) $10^3 : 5^3$

Beispiel für eine Rechenregel: Die folgenden Rechnungen sind alle von der Form, dass zwei Potenzen mit gleichen Basen multipliziert werden:
$10^3 \cdot 10^6$, $5^2 \cdot 5^3$, $2^7 \cdot 2^3$
Das zugehörige Gesetz sollte bereits bekann sein: die Basis wird gleich gelassen, die Exponenten addiert. Das lässt sich algebraisch ausdrücken, indem die Basis mit a, die beiden Exponenten mit n und m bezeichnet werden.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Versuchen Sie weitere Gruppen von Rechnungen mit jeweils gleicher Struktur zu finden. Formulieren Sie die zugehörige Regel nach Möglichkeit in Worten und algebraisch.

Begründen Sie die Regel. Dabei kann Algebra helfen, aber auch typische Beispiele für die Rechnungen.

Nun kennen Sie die Potenzrechengesetze. Ähnlich wie bei «Punkt- vor Strichrechnung» gibt es nun noch eine Konvention, die es zum Rechnen braucht:
«Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung»

Das bedeutet einfach, dass $3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$, wie zu erwarten ist. Soll auch die 3 potenziert werden, wird geschrieben $(3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 144$.

Dies hat eine Konsequenz, die oft zu Fehlern führt. Es gilt ja $-2 = (-1) \cdot 2$. Also $-2^2 = (-1) \cdot 2^2 = -4$. Soll auch das Minuszeichen mit quadriert werden, muss eine Klammer geschrieben werden $(-2)^2 = 4$.

1. Berichtigen Sie die Rechnungen, falls sie falsch sind.

a) $5^7 \cdot 5^5 = 25^{12}$	b) $(5^7 + 2^7) \cdot 3 = 3 \cdot 5^7 + 3 \cdot 2^7$	c) $(4^3 \cdot 5^3) \cdot 8 = 32^3 \cdot 40^3$
d) $4^3 \cdot 5^3 = 20^6$	e) $-3^4 = 81$	f) $8^3 = (2^3)^3 = 2^6$

Auftrag 10.2

Im folgenden Teil stehen einige richtige und einige falsche Regeln.

Suchen Sie die richtigen von den falschen zu unterscheiden. Bei den (vermutlich) richtigen Aussagen geben Sie zwei konkrete Beispiele zur Veranschaulichung. Beachten Sie, dass eine solche Aussage nur dann als richtig gilt, wenn er in allen Fällen stimmt! Zum Widerlegen reicht ein einziges Gegenbeispiel. Finden Sie also ein Gegenbeispiel, wenn Sie denken, dass eine Aussage nicht stimmt.

Aussage	r/f	2 Beispiele, oder ein Gegenbeispiel
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		
$a^n = n^a$		
$a^n b^n = (ab)^n$		
$a^n + b^n = (a+b)^n$		
$a^n : a^m = a^{n-m}$		
$a^n : b^n = (a:b)^n$		
$a^n - b^n = (a-b)^n$		
$(a^n)^m = a^{nm}$		
$a^n \cdot b^m = (a \cdot b)^{n+m}$		
$-a^n = (-a)^n$		

10.2 Theorie: Potenzen mit negativen Exponenten

Auftrag 10.3

Bereits bei der wissenschaftlichen Schreibweise haben Sie gesehen, wie negative Zahlen als Potenzen verwendet werden können. Das lässt sich nicht nur mit der Basis 10 durchführen, sondern mit beliebigen Basen. Die nächste Tabelle zeigt, wie sich negative Zweierpotenzen ergeben, oder Null als Exponent.

n	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
2^n									

Immer wenn n um eins verkleinert wird, halbiert sich das Ergebnis. Diese einfache Regel setzt man einfach für negative n fort und gelangt zu folgender Definition:

Definition 10.2

$a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ oder allgemein $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für alle natürlichen Zahlen n.

Beispiel 10.2

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^1} = \frac{3}{2} = 1.5$

Bei negativen Exponenten wird $a = 0$ ausgeschlossen, da die Division durch Null nicht definiert ist.

Auftrag 10.4

Bei $a = 0$ und $n = 0$ sind sowohl das Ergebnis 0 als auch 1 denkbar. Suchen Sie Begründungen für beide Ergebnisse.

Satz 10.1

Permanenzprinzip Die Rechenregeln gelten auch für negative Potenzen.

Beweis: Wir prüfen nur $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$ für $m > 0$ und $n > 0$.

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m : a^n$$

nach der Definition. Dies können wir mit einem Potenzrechengesetz weiter berechnen und erhalten

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Und das war zu zeigen.

Analog lässt sich mit allen anderen Vorzeichenkombinationen und den anderen Potenzrechengesetzen vorgehen. □

10.3 Aufgaben

10.3.1 Aufgaben zu Potenzen mit negativen Exponenten

2. Berechnen Sie im Kopf

a) $2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$

b) $10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$

c) $10^{-6}, 10^{-9}$

d) $0^1, 1^0, -0^1, 0^{-1}$

e) $\frac{1}{5^{-2}}, \frac{1}{a^{-2}}$

3. Schreiben Sie als Potenz mit negativem Exponenten (ohne Taschenrechner)

a) $\frac{1}{2^4}, \frac{1}{3^5}, \frac{1}{8^2}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{100}$

c) $0.25, 0.125, 0.36$

d) $0.1, 0.01, 0.001$

10.3.2 Aufgaben zu den Potenzrechengesetzten

Zur Erinnerung: die Potenzrechengesetze

Satz 10.2

Es sind a und b irgendwelche reellen Zahlen ungleich Null. Es sind r und s ganze Zahlen. (Beispielsweise ist $r = -42$ möglich.)

(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Beispiel: $2^{-4} \cdot 2^6 = 2^2$

(2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ Beispiel: $\frac{10^6}{10^2} = 10^4$

(3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ Beispiel: $(3 \cdot 4)^{-5} = 3^{-5} \cdot 4^{-5}$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Beispiel: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

(5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ Beispiel: $(a^2)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^6$

4. Sind die folgenden Umformungen korrekt? Wenn ja: Welche Regel (1-5) liegt zu Grunde?]

a) $2^3 + 3^3 = 5^3$ b) $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$ c) $(3^2)^3 = 3^9$ d) $4^2 + 6^2 = 10^2$

e) $(4 \cdot 6)^2 = 4^2 \cdot 6^2$ f) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ g) $5^{(2+3)} = 5^2 + 5^3$ h) $\frac{8^{10}}{8^2} = 8^8$

i) $\frac{2^2}{2^4} = 2^2$

5. Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner und ohne komplett auszurechnen: 5^{14} ist ein erlaubtes Ergebnis.

a) $5^3 \cdot 5^4 \cdot 5^7$ b) $(-4)^5 \cdot (-4)^7$ c) $-3^4 \cdot (-3^5)$ d) $4 \cdot 4^3 \cdot 4^5$

e) $5^{11} : 5^5$ f) $5^5 : 5^8$ g) $6^{-3} \cdot 6^{-4}$ h) $1.2^7 \cdot 5^7$

i) $\left((-4)^3\right)^5$ j) $0.2^{10} : 0.2^5$ k) $45^{-6} : 9^{-6}$ l) $(8^7 : 4^7) \cdot 2^{-7}$

m) $\left((5)^{-2}\right)^5$ n) $\left((-4)^{-6}\right)^{-7}$ o) $(14^7 \cdot 5^7) : (7^7 \cdot 2^7)$

6. Welche der folgenden Gleichungen sind allgemeingültig?

Widerlegen Sie falsche Gleichungen, die nicht immer gelten, mit einem Gegenbeispiel, belegen Sie immer geltende Gleichungen mit zwei Beispielen. Geben Sie ausserdem eine Begründung, warum die Gleichung gilt.

a) $a^{2n} + b^{2n} = (a^n + b^n)^2$ b) $a^n \cdot b^m = (a \cdot b)^{n+m}$

c) $2^{3n} = 8^n$

7. Für welche Zahlen a sind die folgenden Aussagen richtig?

a) Die vierte Potenz der Zahl ist grösser als die Zahl selber.

b) Die dritte Potenz der Zahl hat das entgegengesetzte Vorzeichen der Zahl.

8. Falls die Gleichung falsch ist: Ändern Sie jeweils möglichst wenig in der Gleichung, damit die Gleichung richtig wird.

a) $2^3 + 2^4 = 2^7$ b) $-2^{12} = (-2)^{12}$ c) $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$

d) $2^5 \cdot 3^4 = 6^9$ e) $7^5 : 7^2 = 1^3$ f) $a^n \cdot (b^n \cdot c^n) = a^n \cdot b^n \cdot a^n \cdot c^n$

9. Welche der folgenden Rechengesetze sind allgemeingültig?

Tipp: Arbeiten Sie mit Beispielen oder algebraischen Umformungen

a) $a^{2n} - b^{2n} = (a^n - b^n)^2$ b) $a^n \cdot b^m = (a \cdot b)^{n+m}$ c) $5^{3n} = 125^n$

d) $(-1)^{-2n} = 1$

10. Benutzen Sie einen Taschenrechner. Jeder Mensch besitzt $2 = 2^1$ Eltern, $4 = 2^2$ Grosseltern, $8 = 2^3$ Urgrosseltern etc.

Wieviele

Urururururururururururururururururururururururururururururururururururururgrosseltern besitzt also ein jeder Mensch? (Es handelt sich hier um die 40. Vorfahrenreihe eines Menschen.)

Wie ist dieses Ergebnis zu verstehen, hat es doch niemals so viele Menschen auf der Erde gegeben?!

11. Benutzen Sie einen Taschenrechner.
Ein interessantes Beispiel aus einer Legende:
Der indische König Sheram wollte den Erfinder des Schachspieles belohnen. Dieser wünschte sich für das erste Feld des Schachbretts ein Reiskorn und für jedes weitere Feld doppelt so viele wie für das vorhergehende Feld.
Wie viele Reiskörner liegen auf dem 64-ten Feld? Wieviel wiegen diese, wenn 40 Reiskörner 1g wiegen?

10.4 Vertiefungen und Exkurse

10.4.1 Vertiefung: Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Dieser Abschnitt wird benötigt, um Exponentialfunktionen verstehen zu können. Bei der Funktion $f(x) = 2^x$ wächst der Exponent an. Es muss nicht nur 2^1 und 2^2 betrachtet werden, sondern auch die Zahlen dazwischen. Was bedeutet also $2^{1.5} = 2^{3/2}$.

Es stellt sich also die Frage, wie Brüche als Exponenten definiert werden können. Was ist zum Beispiel $a^{1/n}$? Wieder versuchen wir mit dem Permanenzprinzip. Wenn wir $a^{1/n}$ sinnvoll definieren wollen, so muss mit dem fünften Potenrechengesetz aus Satz 10.2 gelten:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$$

Wird also $a^{\frac{1}{n}}$ mit n potenziert, so ergibt sich a. Das ist aber eine sinnvolle Definition der n-ten Wurzel:

Beispiel 10.3

Das Volumen einer Kugel beträgt $V = 4/3\pi r^3$. Ist das Volumen gegeben, so wird die Zahl r gesucht, deren dritte Potenz $3/(4 \cdot \pi) \cdot V$ ist. Die Lösung, falls die zweite Potenz im Spiel ist, kennen wir bereits als Quadratwurzel. Hier würden wir von der dritten Wurzel sprechen:

Definition 10.3

Hier ist a eine positive Zahl und n eine natürliche Zahl.
Die n-te Wurzel aus a ist diejenige positive Zahl x, deren n-te Potenz gleich a ist.
Die Definition lässt sich als Formel ausdrücken:

$$x = \sqrt[n]{a}, \text{ falls } x^n = a \text{ und } x \geq 0.$$

Für die $n - te$ Wurzel gibt es zwei Schreibweisen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Bemerkung: Meist wird hier $1/n$ statt $\frac{1}{n}$ im Exponenten geschrieben. Das ist oft weniger fehleranfällig.

Beispiel 10.4

Vollziehen Sie die folgenden Rechnungen bitte mit dem Taschenrechner nach. Die n-te Wurzel ergibt sich mit den Tasten $\boxed{\wedge}(1/n)$.

$$16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$$

$$125^{1/3} = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$2097152^{1/7} = \sqrt[7]{2097152} = 8$$

$$12155.0625^{1/4} = \sqrt[4]{12155.0625} = 10.5$$

Als Exponenten können nun beliebige Bruchzahlen[1] zugelassen werden:

[1] Erinnerung: Als Bruchzahlen gelten alle Zahlen, die sich in der Form $\frac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a und b darstellen lassen. Diese Zahlen heissen rationalle Zahlen. Die Abkürzung für die Menge der rationalen Zahlen ist $\mathbb{Q}$. Die natürlichen Zahlen, und auch die ganzen Zahlen sind eine Teilmenge der rationalen Zahlen: Also ist zum Beispiel -42 eine rationale Zahl.

Definition 10.4

Für $a > 0$ und r, s ganze Zahlen wird definiert

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Diese neuen Bezeichnungen passen zu den bekannten Potenzrechengesetzen, die weiter gelten:

Satz 10.3

Nun sind a und b grösser als Null. Die Potenzrechengesetze (Satz 10.2) gelten für alle Exponenten in $\mathbb{Q}$.

Beweis: Wir zeigen nur, dass für natürliche Zahlen n und m gilt

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Beide Zahlen sind dann gleich, wenn auch ihre n-te Potenz gleich ist. Wir potenzieren also auf beiden Seiten der Gleichung in die n-te Potenz. Nach Definition steht dann auf der linken Seite a^m. Auf der rechten Seite ergibt sich

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nm} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m = a^m.$$

Dabei gelten die ersten drei Gleichheitszeichen nach den Potenzrechengesetzen und das letzte nach Definition der Wurzel.
Also hat sich nach dem Potenzieren auf beiden Seiten a^m ergeben. Deshalb waren die Ausdrücke auch vorher schon gleich.
Auf ähnliche Art lässt sich durch Potenzieren zeigen, dass alle Potenzrechengesetze auch für gebrochene Exponenten gelten. □

Die nun eingeführten rationalen Zahlen als Exponenten sind die bislang allgemeinste Form, mit Potenzen zu arbeiten. Wird nur mit Wurzeln gearbeitet, lassen sich die Gesetze wie folgt formulieren.

Satz 10.4

Es sind a und b positive Zahlen, n und m natürliche Zahlen. Dann gilt

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Beispiel 10.5

$$5^{1.2} = 5^{6/5} = \sqrt[5]{5^6} = \sqrt[5]{15625} \simeq 6.899$$

$$2.35^{15.3\overline{7}} = 2.35^{692/45} = \sqrt[45]{2.35^{692}} \simeq 508392.490$$

$$512^{-2/3} = \frac{1}{512^{2/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{512}\right)^2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

Hinweis: Als Basis lassen wir nur noch positive reelle Zahlen zu.

Begründung: $(-4)^{1/2}$ ist die Wurzel aus -4 und damit nicht erklärt. Nun betrachten wir $((-4))^{1/4}$ Das ergibt durch Berechnung der inneren Klammer $(16)^{1/4} = 2$ und andererseits durch Anwendung der Potenzrechengesetze $(-4)^{2/4} = (-4)^{1/2}$ also etwas nicht Definiertes.

Vorsicht: Taschenrechner halten sich nicht unbedingt an diese Konvention.

12. Berechnen Sie die folgenden Potenzwerte ebenfalls mit sämtlichen Zwischenschritten (wie oben) und ohne Taschenrechner. Teilweise müssen Sie Dezimalzahlen in Brüche verwandeln.

a) $81^{3/4}$ b) $81^{-3/4}$ c) $16^{1.25}$ d) $4^{-2.5}$

e) $100\,000^{3/5}$ f) $100\,000\,000^{-0.375}$ g) $4096^{7/6}$ h) $64^{-7/3}$

13. Vereinfachen Sie

a) $3^0 : 3^{-1.5}$ b) $5 : 5^{-2.5}$ c) $\left(3^{1/3}\right)^6$ d) $2 : \sqrt[10]{2}$

14. Welche der folgenden Zahlen sind grösser als 1 ?
Diese Aufgabe ist durch Ueberlegungen – also ohne Taschenrechner – zu lösen!

a) $(1/2)^{-5}$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-8}$ c) $(5/3)^{-6}$ d) $(8/9)^{12}$

e) 0.95^{-2} f) 0.99^8

15. Ist die Zahl grösser als 1?

a) $32^{-1/6}$ b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2.5}$ c) $0.25^{3/4}$

10.4.2 Vertiefung: Potenz- und Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)$ heissen auch Wurzelfunktionen.

Graphen von Potenzfunktionen

Auftrag 10.5

Vervollständigen Sie die Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen der vier Potenzfunktionen.

x	0.10	0.20	0.30	0.45	0.60	0.75	0.82	0.90	0.95	1.00	1.02	1.06	1.10	1.15
x^2														
x^3														
x^5														
x^8														

Graphen von Wurzelfunktionen

16. a) Begründen Sie, warum sich der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ durch Spiegelung an der Diagonalen $y = x$ aus dem Graphen von $f(x) = x^2$ ergibt. (Mit einigen Beispielen wird klar, was passiert...)

b) Spiegeln Sie die Graphen der Potenzfunktion $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ an der Geraden $h(x) = x$ und erzeugen Sie so die Graphen der Wurzelfunktionen $s(x) = \sqrt{x}$ und $t(x) = \sqrt[3]{x}$.

17. Lesen Sie die folgenden Werte an den Graphen ab und überprüfen Sie sie mithilfe eines Taschenrechners.

a) $\sqrt{2} =$ $\sqrt{3} =$ $\sqrt{7.5} =$ $\sqrt{10.3} =$ $\sqrt{14.8} =$

b) $\sqrt[3]{0.6} =$ $\sqrt[3]{2.5} =$ $\sqrt[3]{7} =$ $\sqrt[3]{9.8} =$ $\sqrt[3]{13.4} =$

10.4.3 Exkurs: Infusionen

Es gibt Patientinnen und Patienten, denen oft intravenös Infusionen verabreicht werden müssen, beispielsweise in der Onkologie (Krebsbehandlung). Dafür darf nicht jedes Mal die Vene angestochen werden. Eine mögliche Lösung ist ein Port.

Portsystem

Bei einem Port-System handelt es sich um eine unter der Haut eingesetzte Hohlkammer mit einem angeschlossenen dünnen Katheter, der meist in eine Vene gelegt wird. Durch eine Membran kann die Hohlkammer mit einer speziellen Kanüle (Portnadel) angestochen werden, um Infusionen in das System und somit in den Blutkreislauf zu leiten. Nach Beendigung der Infusion (z.B. bei Chemotherapie) kann der Port für einen längeren Zeitraum stillgelegt werden, da sich die Membran nach Herausziehen der Kanüle wieder verschließt. Bei fachgerechtem Umgang ist eine Nutzungsdauer über mehrere Jahre möglich.
(http://www.pflegewiki.de/wiki/Port-System)

Das Durchstossen der Membran des Ports geschieht mit speziellen Portnadeln, die einen Durchmesser zwischen 1.1 und 0.7 Millimetern haben. Die Länge der Nadeln beträgt zwischen 20 und 32 mm.
(http://www.pfmmedical.com/de/produktkatalog/pfm-medical/portnadeln/jetcanTM_standard_portnadel/index.html)

Pflegesituation

Corinne ist im Spätdienst und betreut einen Patienten, welcher Träger eins Portsystems ist. Der Port ist zurzeit jedoch nicht angestochen. Nun bekommt dieser Patient eine Computertomographie. Corinne weiss, dass zu der besseren Darstellung ein Kontrastmittel appliziert werden muss. Corinne ist sich jedoch nicht ganz sicher, ob das Kontrastmittel nur getrunken werden muss oder ob es ebenfalls noch iv-appliziert werden muss. Aus diesem Grund nimmt Corinne Rücksprache mit der Radiologie. Diese erklärt Corinne, dass der Patient kurz vor der Computertomographie 300 ml Kontrastmittel in 3 Minuten bekommen wird. Für die Nadelauswahl überlegt Corinne welchen Zweck die Nadel erfüllen muss. Da der Patient voraussichtlich keine Blutprodukte erhält, würde sie keine Nadel mit grossem Durchmesser wählen. Sie überlegt weiter, was sonst noch einen Einfluss haben könnte. Die Applikationsmenge von $100\,\mathrm{ml\,min^{-1}}$ scheint ihr relativ viel. Aus diesem Grund sucht sin in den Unterlagen der Herstellerfirma Angaben zu der maximalen Durchflussrate. Sind findet diese Angaben und wählt den Durchmesser der Nadel entsprechend aus. Die Länge der Nadel bestimmt sie nach der Inspektion des Ports.

Hintergrund

Die Infusion sollte in den Port nicht mit zu hohem Druck eingegeben werden. Je geringer der Durchmesser der Nadel ist, desto höher muss der Druck sein. Der Einfluss des Durchmessers ist aber sehr hoch: Die Querschnitssfläche der Nadel steigt mit dem Quadrat des Durchmessers (Der Radius r ist die Hälfte des Durchmessers): $A = \pi r^2$.

Durch die Wand der Kanüle wird die Flüssigkeit aber noch weiter abgebremst, der Druck muss weiter erhöht werden. Insgesamt gilt das Gesetz von Hagen-Poiseuille:

$$\dot{V} = \frac{k \cdot r^4 \Delta p}{l}$$

Dabei ist $\dot{V}$ der Volumenstrom durch das Rohr in ml/s. Dieser ist in der Pflegesituation vorgegeben zu $100\,\mathrm{ml\,min^{-1}}$. Weiter ist r der Innendurchmesser des Rohrs und Δp die Druckdifferenz zwischen Anfang und Ende des Rohrs. l ist die Länge des Rohrs.

Die Materialkonstante k beträgt bei 20° warmem Wasser 0.393 1/(Pa·s).

Auftrag 10.6

In der Pflegesituation ist der Volumenstrom vorgegeben mit $100\,\mathrm{ml\,min^{-1}}$. Auch k lässt sich nicht ändern. Untersuchen Sie im Folgenden separat den Einfluss von l und r^4.

Es soll deutlich werden, wie stark sich r^4 schon bei kleinen Änderungen von r ändert.

a) Um welchen Faktor muss Δp geändert werden, wenn die Länge des Rohrs verdoppelt wird. Und wenn die Länge verdreifacht oder halbiert wird? (Das Ergebnis $\dot{V}$ muss gleich bleiben.)

b) Um welchen Faktor muss Δp geändert werden, wenn der Radius des Rohrs verdoppelt wird? Und wenn er halbiert wird?

c) Um welchen Faktor muss Δp geändert werden, wenn statt einer 1 mm Nadel eine 0.9 mm Nadel verwendet wird? Um wieviel Prozent muss die Druckddifferenz erhöht werden? (Bedenken Sie, dass die Nadeln vom Augenschein her kaum unterschieden werden können.)

d) Dasselbe mit einer 0.7 mm Nadel statt einer 1.1 mm Nadel.

e) Mit welchem Faktor muss die Länge verändert werden, wenn statt einer 2 mm Nadel eine 1 mm Nadel verwendet wird? Dabei sollen $\dot{V}$, k und Δp nicht geändert werden.

f) Wieder sollen r und l verändert werden: Mit welchem Faktor muss die Länge verändert werden, wenn statt einer 1.1 mm Nadel eine 10.7 mm Nadel verwendet wird?

Auftrag 10.7

Eine vergrösserte Prostata drückt auf die Harnröhre. Bei einem Patienten wird dessen Durchmesser dadurch auf 80 Prozent herabgesetzt. Welchen Einfluss hat das auf den Harnfluss?

Auftrag 10.8

Zwei Personen versuchen möglichst schnell ein Wasserglas mit einem Trinkhalm zu leeren. Die eine Person verwendet zwei Strohhalme, die anderen einen einzigen Strohhalm mit doppeltem Durchmesser.

Wer gewinnt? Probieren Sie es auch aus.

Auftrag 10.9

Jemand kommt auf die Idee, einen Schnorchel mit doppeltem Durchmesser und 16facher Länge (3.2 m statt 20 cm) zu bauen. Warum klappt das nicht?

10.4.4 Exkurs: Body-Mass-Index

Körperoberfläche und Energiehaushalt

Der Energieaustausch eines warmblütigen Tiers geschieht vor allem über die Haut. Dies ist eine Oberfläche. Wird ein Körper mit dem Faktor k zentrisch gestreckt, so erhöht sich die Oberfläche mit dem Faktor k^2. Das Volumen erhöht sich mit dem Faktor k^3.

Beispiel 10.6

Eine Kugel mit Radius r hat das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und die Oberfläche $A = 4\pi r^2$. Wird der Radius, beispielsweise von $r = 0.5$ m, verdoppelt, so vervierfacht sich die Oberfläche, und das Volumen verachtfacht sich.

Die benötigte Energie ist, bei optimaler (nicht zu warm, nicht zu heiss) Aussentemperatur näherungsweise proportional zum Gewicht. Vom Standpunkt des Energieaustauschs ist es sinnvoll, dass das Verhältnis von Gewicht/Körpergrösse^2 bei verschieden grossen Exemplaren einer Art konstant sein sollte.

Dieses Verhältnis wurde zuerst 1832 vom belgischen Mathematiker Adolphe Quetelet betrachtet. 1972 wurde von Ancel Keys dafür die Bezeichnung Body-Mass Index eingeführt. Sie empfahl diesen Index für den statistischen Vergleich von Populationen, nicht von Einzelpersonen.

Definition 10.5

Body-Mass-Index = Körpergewicht in *kg* / (Körpergrösse in *m*)^2.

Beispiel 10.7

Gewicht 70 kg, Körpergrösse 1.8m. Body-Mass-Index $70/1.8^2 = 21.6$

Auftrag 10.10

Der Body-Mass-Index lässt sich auch bei Tieren berechnen.
Der Göttinger Anatom und Physiologe Carl Bergmann hat 1847 beobachtet, dass bei weiter im Norden wohnenden Arten die Grösse zunimmt. In der Tat verändert sich beispielsweise bei Pinguinen auch der Body-Mass-Index. Betrachten Sie die folgende Tabelle:

Pinguin-Art	Körpergrösse cm	Körpergewicht kg	Vorkommen Grad sückliche Breite
Galápagos-Pinguin	50	2,2	Äquator
Humboldt-Pinguin	65	4,5	5 bis 35
Magellan-Pinguin	70	4,9	34 bis 56
Königspinguin	95	15	50 bis 60
Kaiserpinguin	120	40	65 bis 77

http://de.wikipedia.org/wiki/ökogeographische_Regel

Berechnen Sie jeweils den Body-Mass-Index. Finden Sie eine Erklärung für die Zunahme der Werte.

Übrigens: Die im hohen Norden lebenden Inuit haben ein anderes Verhältnis von Beinlänge und Torsolänge – und dadurch bedingt einen 10% höheren Body-Mass Index als Europäer.
http://www.circumpolarhealthjournal.net/index.php/ijch/article/view/21086

18. Eine theoretische Person hat ein Körpergrösse von $l = 1.5$ m und ein Gewicht von $m = 48$ kg.

Sie wird, natürlich wieder theoretisch, zentrisch gestreckt mit dem Streckfaktor $k = 1.2$ und ist danach also $L = 1.8$ m gross. Ihr Volumen nimmt mit dem Faktor 1.2^3 zu. Ihr neues Gewicht M berechnet sich, wenn die Dichte gleich bleibt, auf die gleiche Art:
$M = 1.2^3 \cdot 48$ kg.

Berechnen Sie M und den Body-Mass-Index der beiden Personen.
Was sagt dies über den Body-Mass-Index aus? Genauer gesagt: Zwei Personen haben den gleichen Body-Mass-Index. Die eine ist grösser. Wer ist «rundlicher», die gössere oder die kleinere Person?

Zeichnen Sie zwei Personen mit dem gleichen Body-Mass-Index aber deutlich verschiedener Körpergrösse.

Mehr Aufgaben zu Potenzen

19. Jana hat aus Papier eine Kugel gefaltet. Die Kugel rechts hat einen Durchmesser von 7.5 cm. Sie ist aus einem Stück A4-Papier gefertigt.
Sie möchte gerne eine grössere Kugel falten und als Lampenschirm benutzen. Dieser soll einen Durchmesser von 30 cm haben. Welches Papierformat muss sie als Grundlage nehmen? (Ein Stück A3 Papier hat doppelte Fläche bei gleichem Seitenlängenverhältnis, A2 hat wieder doppelte Fläche und so weiter...)

20. Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt für die Umlaufzeiten der Planeten Venus und Erde:

$$\frac{t_v^2}{t_e^2} = \frac{a_v^3}{a_e^3}$$

Dabei bezeichnet t_e die Umlaufzeit der Erde um die Sonne (also 1 Jahr),
t_v die Umlaufzeit der Venus,
a_e den Sonnenabstand der Erde und
a_v den Sonnenabstand der Venus.
Bekannt ist, dass der Sonnenabstand der Venus $3/4$ des Sonnenabstandes der Erde beträgt.

Berechnen Sie die Umlaufzeit der Venus in Tagen.

10.4.5 Exkurs: Körperoberfläche

Bei steigendem Body-Mass-Index ist zu erwarten, dass die Hautoberfläche im Verhältnis zur Körpergrösse zunimmt. Der Index sagt aber nichts über den absoluten Wert der Hautoberfläche aus. In verschiedenen medizinischen Situationen ist es wichtig, die Hautoberfläche abschätzen zu können. Dies ist klar bei Verbrennungen. Es gibt aber auch Medikamente, die nicht nach Gewicht, sondern nach Hautoberfläche dosiert werden: Die Hautoberfläche gibt einen guten Anhaltspunkt für die Stoffwechselaktivität. Vor allem in der Behandlung von Kindern und in der Krebstherapie (Chemotherapie) werden Medikamente nach Hautoberfläche berechnet.

Die klassische Formel zur Berechnung der Hautoberfläche wurde 1916 von DuBois und DuBois eingeführt. Obwohl sie nur auf der Grundlage eines Datensatzes mit neun Personen eingeführt wurde, stellt sie eine gute Näherung der Hautoberfläche dar und ist immer noch die wichtigste Formel zur Berechnung der Hautoberfläche.

Definition 10.6

DuBois-Formel Hier ist m die Körpermasse in kg, l, die Körperlänge in cm. Daraus ergibt sich die Körperoberfläche in cm^2 mit der Formel

$$A_{DB} = m^{0.425} \cdot l^{0.725} \cdot 0.007184$$

Beispiel 10.8

Die Körperoberfläche einer Person mit Grösse 180 cm und Gewicht 75 kg beträgt nach der DuBois-Formel 1.89 m^2.

Die verwendeten Potenzen in der Formel erscheinen recht willkürlich. Für Kinder sind die Werte auch nicht ganz akkurat. 1987 veröffentlichte der Mediziner Robert D. Mosteller eine vereinfachte Formel, die insbesondere für Kinder eine bessere Näherung darstellt.

Definition 10.7

Mosteller-Formel Hier ist m die Körpermasse in kg, l, die Körperlänge in cm. Daraus ergibt sich die Körperoberfläche in cm^2 mit der Formel

$$A_M = m^{0.5} \cdot l^{0.5} \cdot \frac{1}{60} = \sqrt{\frac{m \cdot l}{3600}}$$

Beispiel 10.9

Nach der Mosteller-Formel hat die Person aus dem letzten Beispiel eine Körperoberfläche von 1.87 m^2. Für diese Person weichen die beiden Werte also nicht stark voneinander ab.

Beide Formeln lassen sich Online berechnen, zum Beispiel:
http://www.labor-limbach.de/Berechnung_Koerperob.127.0.html

Es gibt weitere Formeln zur Berechnung der Körperoberfläche
http://de.wikipedia.org/wiki/Körperoberfläche

Die nächsten beiden Aufgaben stammen aus: Marianne Gierse (2001): *F*achrechnen für Pflegeberufe Schlütersche: Hannover.

Es geht darum, die Erwachsenendosis für ein Kind umzurechnen. Dabei wird für den Erwachsenen mit einer durchschnittlichen Körperoberfläche von 1.73 m^2 gerechnet. Es ergibt sich

$$\text{Kinderdosis} = \frac{\text{Körperoberfläche Kind}}{1.73} \cdot \text{Erwachsenendosis}$$

21. Die Erwachsenendosis für ein Medikament beträgt 0.9 g. Welche Dosierung wäre für ein 23.8 kg schweres und 122 cm großes Kind erforderlich? Rechnen Sie mit beiden Formeln für die Körperoberläche.

22. Die Erwachsenendosis für ein Medikament beträgt 250 mg. Welche Dosierung wäre für ein 15.1 kg schweres und 97 cm großes Kind erforderlich?

Auftrag 10.11

Vergleichen Sie die beiden Formeln: Erstellen Sie mit einem Tabellenkalkulationsprogramm je eine Tabelle, die für verschiedene Grössen und Gewichte die Körperoberfläche nach DuBois und Mosteller berechnet. Erstellen Sie dann eine Tabelle, in der das Verhältnis der beiden Werte angegeben wird.

Lösungsverzeichnis

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ . . . 6

2) $1, 0.1, 0.01, 0.001$ . . . 6

2) $0.000001, 0.000000001$ . . . 6

2) 0, 1, 0, - . . . 6

2) $25, a^2$ . . . 6

3) $2^{-4}, 3^{-5}, 8^{-2}$ . . . 6

3) $2^{-1}, 2^{-4}, 2^{-6}, 10^{-2}$ . . . 6

3) $2^{-2}, 2^{-3}, \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$ . . . 6

3) $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ . . . 6

4) falsch . . . 7

4) richtig, Regel 3 . . . 7

4) falsch . . . 7

4) falsch . . . 7

4) richtig, Regel 3 . . . 7

4) falsch . . . 7

4) falsch . . . 7

4) richtig, Regel 2 . . . 7

4) falsch . . . 7

5) 5^{14} . . . 7

5) $(-4)^{12} = 4^{12}$ . . . 7

5) 3^9 . . . 7

5) 4^9 . . . 7

5) 5^6 . . . 7

5) 5^{-3} . . . 7

5) 6^{-7} . . . 7

5) 6^7 . . . 7

5) $(-4)^{15} = -4^{15}$ . . . 7

5) 0.2^5 . . . 7

5) 5^{-6} . . . 7

5) 1 . . . 7

5) $5^{-2/5}$ . . . 7

5) 4^{42} . . . 7

5) 5^7 . . . 7

6) gilt nicht. . . . 7

6) gilt nicht . . . 7

6) gilt, denn $2^3 = 8$ . . . 7

7) $a > 1$ und $a < 0$ . . . 8

7) Für alle negativen Zahlen . . . 8

8) multiplizieren statt addieren . . . 8

8) z.B. links das Minus zu Plus machen . . . 8

8) stimmt . . . 8

8) Die Basen 2 und 3 durch 6 ersetzen . . . 8

8) Die Basis 1 durch 7 ersetzen . . . 8

8) $a^n \cdot (b^n + c^n) = a^n \cdot b^n + a^n \cdot c^n$ . . . 8

9) nein . . . 8

9) nein . . . 8

9) ja 8

9) ja 8

12) 27 11

12) $\frac{1}{27}$ 11

12) 32 11

12) $\frac{1}{32}$ 11

12) 1000 11

12) 0.001 11

12) 16 384 11

12) $\frac{1}{16384}$ 11

13) $3^{1.5} = 3^{3/2} = \sqrt{27}$ 11

13) $5^{1.5} = \sqrt{125}$ 11

13) 9 11

13) $2^{0.9}$ 11

14) ja 11

14) ja 11

14) nein 11

14) nein 11

14) ja 11

14) nein 11

15) nein 11

15) ja 11

15) nein 11

18) 21 und 25.6. Die kleinere ist rundlicher. . . 16

19) A0 16

20) Nach Aufgabenstellung 237 Tage. 16

21) 0.468 g für beide Formeln. 17

22) DuBois: 91 mg; Mosteller 92.5 mg 18