M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Gleichungssysteme

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

6. Juli 2022

6 Lineare Gleichungssysteme

6.1 Refresh: Gleichungen mit einer Variablen

6.1.1 Gleichungen lösen

Beispiel 6.1

Einer Idee im mathbuch folgend, gehen wir von der Lösung aus, und konstruieren daraus eine Gleichung: Zahlen verpacken.

Die Lösung soll sein	$x = 3$
Wir addieren auf beiden Seiten $2x$	$3x = 2x + 3$
Und addieren noch 7	$3x + 7 = 2x + 10$
Nun multiplizieren wir alles mit 2	$2(3x + 7) = 2(2x + 10)$
Wir multiplizieren nur rechts aus	2(3x+7)=4x+20
Und ziehen nun auf beiden Seiten 15 ab.	2(3x+7)-15=4x+5
Nun ist die Gleichung kompliziert genug :)	

Definition 6.1

Ändert sich die Lösung einer Gleichung bei einer Umformung der Gleichung nicht, so heisst die Umformung Äquivalenzumformung.

1. Welche der folgenden Schritte sind immer Äquivalenzumformungen?

a) Auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Zahl addieren

b) Auf beiden Seiten der Gleichung den gleichen Term subtrahieren

c) Beide Seiten der Gleichung durch die gleiche negative Zahl dividieren

d) Auf beiden Seiten der Gleichung den Term umformen

e) Auf einer Seite der Gleichung eine Zahl addieren

f) Auf einer Seite der Gleichung einen Term addieren

g) Eine Seite der Gleichung mit irgendeiner positiven Zahl multiplizieren

h) Eine Seite der Gleichung durch irgendeine positive Zahl dividieren

i) Auf einer Seite der Gleichung den Term umformen

j) Die beiden Seiten der Gleichung miteinander vertauschen

k) Auf beiden Seiten der Gleichung alle Vorzeichen umkehren

2. Auf beiden Seiten der Gleichung mit einer Zahl multiplizieren. Ist das eine Äquivalenzumformung? Geben Sie jeweils auch ein Beispiel.

a) wenn es eine Bruchzahl ist?

b) wenn die Zahl negativ ist?

c) Wenn die Zahl die Null ist?

3. Welche der Gleichungen sind äquivalent?

a) $4x - 2 = 2x + 6$

b) $5x - 2 = 3x + 6$

c) $4x - 1 = 2x + 7$

d) $2(2x - 1) = 2(x + 3)$

e) $-2(2x + 1) = -2(x - 3)$

f) $2(1 - 2x) = -2(x + 3)$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

a) $4x - 2 = \frac{7}{2}x$

b) $6x + 8 = 2(x + 4)$

c) $3x - 6 = 3(x - 4) + 6$

d) $3(x - 4) = 3x - 10$

e) $4x + 3(x - 2) = 2x + 5(x - 12)$

f) $4x + 3(x - 2) = 3(x - 2) - (x - 2)$

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf zwei Arten.

a) $2(x + 5) = 3(x + 1)$

b) $17(x - 5) - 12(x - 5) = 5$

c) $74 - (6x + 2) = 0$

d) $12(x - 4) = 7(x - 4) + 5$

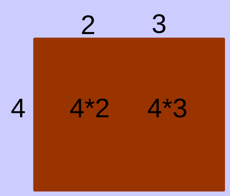
e) $(3x + 2)(x + 1) = 3x^2 + 4x + 2$

f) $x = 42$

Beispiel 6.2

Rechengesetze, Umgang mit Klammern Bei $4(2 + 3) = 20$ müssen beide Zahlen in der Klammer mit 4 multipliziert werden. Bei $4 \cdot (2 \cdot 3) = 24$ nur eine der beiden. Warum eigentlich? Das Rechteckmodell hilft.

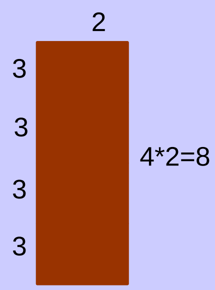
$$\begin{aligned} 2 + 3 &= 5 \qquad / \cdot 4 \\ 4(2 + 3) &= 20 \\ 8 + 12 &= 20 \end{aligned}$$



Das zugehörige Rechengesetz heisst Distributivgesetz.

Dazu im Gegensatz:

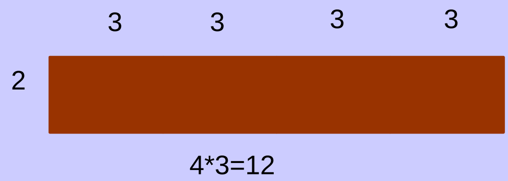
$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= 6 \qquad / \cdot 4 \\ 4 \cdot (2 \cdot 3) &= 4 \cdot 6 = 24 \end{aligned}$$



Die Klammer lässt sich auf zwei Arten auflösen. Version 1:
$(4 \cdot 2) \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$ (siehe Visualisierung rechts.)

Hier wurde das Assoziativgesetz verwendet. Die zweite Version:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (2 \cdot 3) &= 4 \cdot 6 = 24 \\ 2 \cdot (4 \cdot 3) &= 2 \cdot 12 = 24 \end{aligned}$$



Hier wurde das Assoziativgesetz, und auch das Kommutativgesetz verwendet.

6. Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

a) $x^2 = (x - 3)(x + 4) + 12$

b) $(3x + 2)(x + 1) = 3x^2 + 4x + 2$

c) $4(a + 3)(2a - 1) = 2(4a^2 + 8a - 3)$

d) $(b - 4)(b - 5) - 20 = (b + 5)(b - 2)$

e) $\frac{1}{2}y(y + 2) + \frac{3}{2}y(2y + 4) = 7/2y^2 + 6y - 1$

f) $x(x + 3) + x(2x + 5) = 3x(x + 4) + 4$

7. Beschreiben Sie die Aussage mit einer Gleichung und lösen Sie diese.

a) Die Summe aus dem Doppelten und dem Dreifachen einer Zahl beträgt 55.

b) Vermindert man das Fünffache einer Zahl um 3, so erhält man 77.

c) Addiert man das Drittel und das Viertel einer Zahl, so erhält man 21.

d) Die Summer zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beträgt 101.

e) Addiert man 27 zum Doppelten einer Zahl, so erhält man 105.

f) Subtrahiert man vom Achtfachen einer Zahl das Doppelte dieser Zahl, so erhält man 36.

g) Addiert man zu einer ganzen Zahl deren beide Nachfolger, so erhält man 33.

h) Subtrahiert man vom Achtfachen einer Zahl 8, so erhält man dasselbe, wie wenn man vom Zehnfachen der Zahl 12 subtrahiert.

8. Welche der folgenden Aussagen passen zur Gleichung $x + (x + 2) = 28$?

a) Die Summe zweier aufeinanderfolgender Zahlen beträgt 28.

b) Melina ist zwei Jahre jünger als Yves. Zusammen sind sie 28 Jahre alt.

c) Felix ist 28 Jahre alt. Seine Tochter Lia ist um zwei Jahre älter als sein Sohn Tobias.

d) Zwei Summanden unterscheiden einander um 2, ihre Summe beträgt 28.

e) Die Summe einer Zahl und des Doppelten dieser Zahl ist 28.

9. Bei der Abfahrt eines Busses sitzen einige Personen bereits im Bus. Bei der ersten Haltestelle steigen sieben Personen ein und drei aus. Bei der zweiten Station steigen zwölf ein und vier aus. Bei der dritten Haltestelle steigen acht ein und wiederum vier aus. Wie viele Personen waren bei der Abfahrt im Bus, wenn jetzt 22 Leute im Bus sitzen?

6.2 Einführung in Gleichungssysteme

Auftrag 6.1

Bei Fibonacci-Folgen lassen sich die ersten beiden Folgenglieder frei wählen. Das nächste Folgenglied ist immer die Summe der beiden vorangegangenen Folgenglieder. Beispiel: Wir wählen 3 und -5. Die Folge lautet dann 3, -5, -2, -7, -9, ...

Finden Sie eine Fibonacci-Folge, deren viertes Folgenglied 24 ist und deren siebtes Folgenglied 100 ist.

Auftrag 6.2

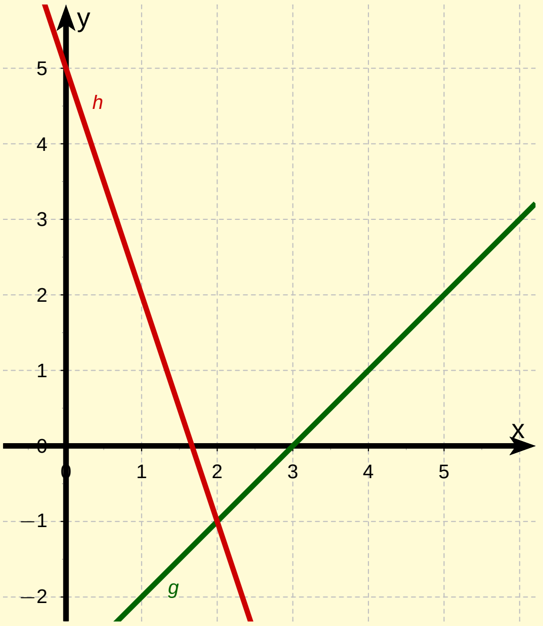
In der Abbildung rechts sind die Geraden $g(x) = y = x - 3$ und $h(x) = y = 5 - 3x$ dargestellt.

a) Ordnen Sie die Geradengleichungen der Graphen zu.

b) Lesen Sie für beide Geraden je drei Punkte aus der Abbildung ab, die auf der jeweiligen Geraden liegen.

c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob Sie richtig abgelesen haben, indem Sie die Koordinaten der abgelesenen Punkte in die Geradengleichungen einsetzen.

d) Lösen Sie die Gleichung $x - 3 = 5 - 3x$. Was hat die Lösung der Gleichung mit den den Geradengleichungen von g und h zu tun?



Auftrag 6.3

Zwei Bedingungen

a) Welcher Punkt $P(x|y)$ liegt auf der Geraden $g(x) = y = 2x+1$ und auf der Geraden $h(x) = y = -x+4$?

b) Welcher Punkt $P(x|y)$ liegt auf der Geraden $g(x) = y = 5x - 1$ und auf der Geraden $h(x) = y = 5x + 100$?

6.3 Theorie und graphische Interpretation

Die Darstellung der Theorie in diesem Abschnitt ich Dominique Meyer.

Definition 6.2

Lineare Gleichung mit zwei Unbekannten
Eine Gleichung der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ heisst lineare Gleichung mit den zwei Unbekannten x und y. Dabei sind a, b und c feste, reelle Zahlen, die meistens bekannt sind, und $a,b \neq 0$.

Beispiel 6.3

$3x - 0.5y = 10$ $2x = 7y - 1$ $x/3 - 10y = 0$

Werden alle Lösungspaare (x/y) der linearen Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ im Koordinatensystem dargestellt, so ist der Graph immer eine Gerade.

Beispiel 6.4

$3y + 9x = 6$
Dazu wir die Gleichung so um, dass y ganz alleine auf einer Seite steht: $y = -3x + 2$.

In der letzten Gleichung erkennen wir die Gleichung einer Geraden mit Steigung $m = -2/3$ und y-Achsenabschnitt 2. Lösungspaare der Ausgangsgleichung $3y + 2x = 6$ sind also zum Beispiel $(0/2)$, $(3/0)$, $(6/-2)$ etc.

Definition 6.3

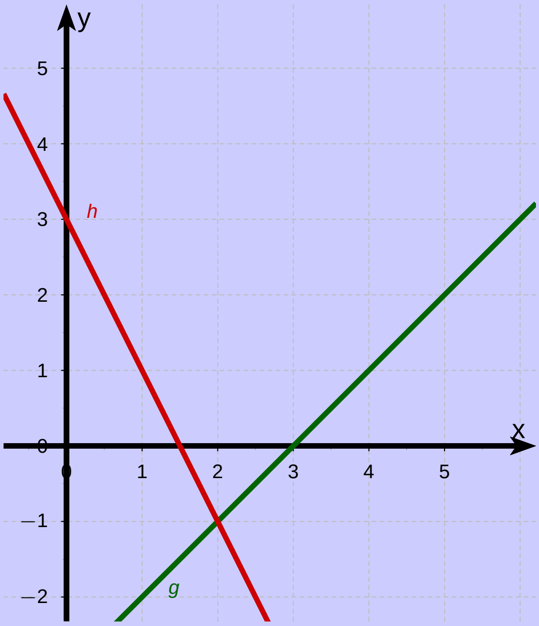
Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten
Unter einem linearen Gleichungssystem verstehen wir mehrere linearen Gleichungen, welche zusammengehören (ein System bilden) und welche mehrere Unbekannte enthalten. Wenn zwei Unbekannte in den Gleichungen vorkommen, dann versteht man unter einer Lösung des Systems ein Zahlenpaar, das alle Gleichungen des Systems erfüllt.

Beispiel 6.5

$$\left|\begin{aligned} 2x &= 3 - y \\ 2x - 2y &= 6 \end{aligned}\right|$$

Wenn wir $x = 2$ und $y = -1$ wählen, so ist zwar die erste Gleichung erfüllt, nicht aber die zweite. Wenn wir $x = 3$ und $y = 0$ wählen, dann ist die zweite Gleichung erfüllt, nicht jedoch die erste. Ein Zahlenpaar $(x7y)$, das beide Gleichungen erfüllt, wird Lösung des Gleichungssystems genannt.

Wir können beide Gleichungen zu Geradengleichungen umformen und dann graphisch darstellen. Der Schnittpunkt liefert dann die Lösung des Systems, weil dessen Koordinaten beide Geraden- gleichungen erfüllen.Rechnerisch können wir beide Gleichungen zunächst nach y umformen und dann zeichnen.
$2x = 3 - y$ ergibt $y = -2x + 3$. Die zweite Gleichung $2x - 2y = 6$ ergibt $y = x - 3$ Rechts sind beide Geraden dargestellt. Der daraus abgelesene Schnittpunkt $(2/ - 1)$ sollte die Lösung des Gleichungssystems sein. Probe: $x = 2$ und $y = -1$ in beide Gleichungen einsetzen $-1 = -2 \cdot 2 + 3$ und $-1 = 2 - 3$. Beide Gleichungen sind erfüllt.



Satz 6.1

Die Lösungen einer einzelnen linearen Gleichung mit zwei Unbekannten bilden - dargestellt in einem Koordinatensystem - eine Gerade. Aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten ergeben sich zwei Geraden.

Die Lösungen von Gleichungssystemen finden sich durch die Schnittpunkte der Geraden.

Satz 6.2

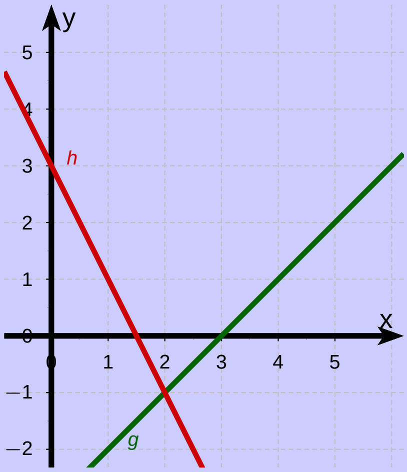
Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten kann genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben.

Begründung: Zwei Geraden können sich schneiden, parallel sein oder zusammenfallen.

Beispiel 6.6

$$\left| \begin{array}{l} y = -2x + 3 \\ y = x - 3 \end{array} \right|$$

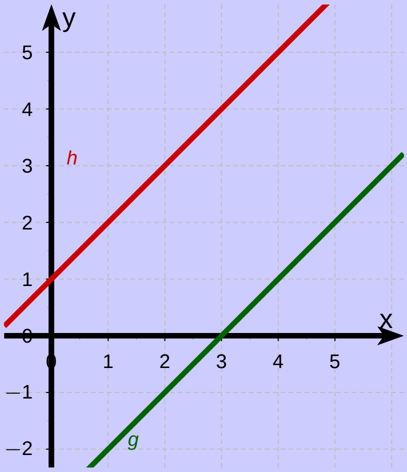
Lösung $(2|-1)$



Beispiel 6.7

$$\left| \begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = x - 3 \end{array} \right|$$

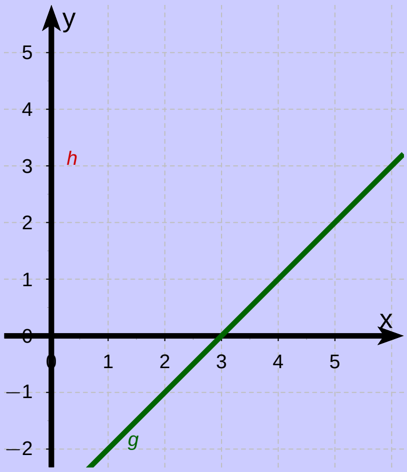
Keine Lösung



Beispiel 6.8

$$\left| \begin{array}{r} 2y + 6 = 2x \\ y = x - 3 \end{array} \right|$$

Die zwei Gleichungen sind äquivalent, d.h. man hat in Wahrheit kein richtiges System von zwei Gleichungen, sondern eigentlich ist es nur eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten. Das hat man aber auf den ersten Blick dem Gleichungssystem nicht angesehen. Diese Gleichungssystem hat unendliche viele Lösungen.



Beispiel 6.9

Linear ist ein Gleichungssystem, wenn die Unbekannten nur mit Zahlen multipliziert werden (vgl. das Beispiel von oben). Werden die Unbekannten aber mit Unbekannten multipliziert, spricht man von nichtlinearen Gleichungen und somit auch von nichtlinearen Gleichungssystemen.

$$\left| \begin{array}{r} x^2 + 2y = 9 \\ x \cdot y = 23 \end{array} \right|$$

10. Lösen Sie die drei Aufgaben, indem Sie die zugehörigen Geraden zeichnen.

a) $\left| \begin{array}{l} 2x = 2y - 5 \\ 2x = 4y + 3 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ 2x - y = -5 \end{array} \right|$ c) $\left| \begin{array}{r} y = x - 4 \\ 2x + y = 8 \end{array} \right|$

6.4 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Lösungsvariablen – Lösungsverfahren

Grosse Teile dieses Abschnitts verdanke ich Martin Münch.

6.4.1 Das Gleichsetzungsverfahren

Beispiel 6.10

$$\left| \begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{array} \right|$$

Da die beiden linken Gleichungsseiten gleich sind, müssen auch die rechten Seiten einander gleich sein. Somit muss gelten:

$$\begin{array}{rcll} x + 1 & = & -2x + 4 & \mid +2x - 1 \\ 3x & = & 3 & \mid :3 \\ x & = & 1 & \end{array}$$

und durch einsetzen von $x = 1$ erhalten wir $y = 2$.

Beim **Gleichsetzungsverfahren** werden beide Gleichungen, falls nötig, nach ein und derselben Variablen aufgelöst. Anschliessend werden die beiden anderen Seiten der Gleichungen gleichgesetzt.

11. Lösen Sie die folgenden, linearen Gleichungssysteme mit Hilfe dieses Verfahrens:

a) $\left| \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} y = -2x + 9 \\ y = 4x + 1 \end{array} \right|$ c) $\left| \begin{array}{l} 3y = \frac{8}{5}x + 26 \\ 3y = -2x + 8 \end{array} \right|$

6.4.2 Das Einsetzungsverfahren

Beispiel 6.11

$$\left|\begin{array}{r} 5x - 4y = 8 \\ y = -0.5x + 5 \end{array}\right|$$

Die Variable y kann durch den Term $-0.5x + 5$ ersetzt werden. Somit muss gelten:

$$\begin{array}{rcll} 5x - 4(-0.5x + 5) & = & 8 & |\text{ausmultiplizieren} \\ 5x + 2x - 20 & = & 8 & | + 20 \\ 7x & = & 28 & | : 7 \\ x & = & 4 & \\ \Rightarrow y & = & 3 & \end{array}$$

Beim **Einsetzungsverfahren** wird eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst, und der gefundene Term wird in die andere Gleichung eingesetzt.

12. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe dieses Verfahrens:

a) $\left|\begin{array}{r} -3x + 4y = 4 \\ 2x - 6 = y \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{r} -\frac{1}{5}y + \frac{7}{5} = x \\ 2x + y = 4 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{r} 6x - 3y = 40 \\ 3y = \frac{1}{2}x + 4 \end{array}\right|$

13. Nun müssen Sie umformen, bevor Sie das Einsetzungsverfahren verwenden können.

$$\left|\begin{array}{r} 7x + 2y = 18 \\ 10x - 3y = 14 \end{array}\right|$$

Bei dieser zweiten Aufgabe zeigt sich wieder, dass das Verfahren nicht immer praktisch ist. Das Umformen kann mühsam sein, indem es zum Beispiel auf Brüche führt.

14. Suchen Sie zwei Zahlen, deren Summe 34 und deren Differenz 16 ist.

15. Eine Zahl ist ist ein Viertel so gross wie eine andere und die gleiche Zahl ist um 28 kleiner als das Doppelte der anderen. Welche beiden Zahlen sind das?

6.4.3 Das Additionsverfahren

Wir können Gleichungen mit einer Zahl multiplizieren, dies verändert die Lösungsmenge der Gleichung nicht. Ziel ist es, bei x oder bei y die gleiche Zahl mit anderem Vorzeichen zu er-halten, damit beim Addieren der zwei Gleichungen eine Variable wegfällt.

Beispiel 6.12

$$\begin{vmatrix} 3x + 7y = 16 \\ x + y = 4 \end{vmatrix}$$

Die einzelnen Gleichungen können umgeformt werden.

$$\begin{vmatrix} 3x + 7y = 16 \\ -3x - 3y = -12 \end{vmatrix}$$

Nun werden beide Gleichungen addiert und man erhält neu nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten:

$$4y = 4$$

Jetzt sehen wir, dass $y = 1$ und erhalten somit durch Einsetzen in die erste Gleichung $x = 3$.

Beim **Additionsverfahren** wird jede Gleichung einzeln so umgeformt, dass ein Koeffizient der ersten Gleichung und der entsprechende Koeffizient der zweiten Gleichung Gegenzahlen sind. Anschliessend wird die zweite Gleichung durch die Summe beider Gleichungen ersetzt, damit das System in Stufenform übergeht. Nun kann der Wert der einen Variablen einfach berechnet werden.

Übungen

16. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe dieses Verfahrens. Ab der dritten Teilaufgabe müssen Sie jeweils beide Gleichungen mit einer Zahl multiplizieren.

a) $\begin{vmatrix} 5x - 2y = 24 \\ x + 3y = -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4x - y = -23 \\ 3x + 4y = -3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 6x + 5y = -36 \\ -7x + 3y = -11 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7x - 3y = 29 \\ 14x - 15y = 10 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2y - x = 1 \\ 6y - 3x = -24 \end{vmatrix}$

6.5 Übungen

Viele der Übungen verdanke ich Martin Münch.

17. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme

a) $\left| \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x + 3 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} x = 5y - 3 \\ x = 2y \end{array} \right|$ c) $\left| \begin{array}{l} 2x = 2y - 5 \\ 2x = 4y + 3 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{r} 2x + 7y = 8 \\ 6x - 13y = -10 \end{array} \right|$ e) $\left| \begin{array}{r} 4x - 5y = 6 \\ 7x + 5y = 26 \end{array} \right|$ f) $\left| \begin{array}{r} 4x + 5y + 9 = 0 \\ 8x - 2y + 3 = 0 \end{array} \right|$

18. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme

a) $\left| \begin{array}{r} x + y = 3 \\ y = x - 1 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{r} 3x + 5y = 10 \\ x = y - 2 \end{array} \right|$ c) $\left| \begin{array}{r} 1.2x - 5y = 2.4 \\ y = 1.2x \end{array} \right|$

19. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme

a) $\left| \begin{array}{r} -2x + y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{r} 2x + 5y = 3 \\ x - 5y = 9 \end{array} \right|$ c) $\left| \begin{array}{r} 3x + 5y = 21 \\ 4x + y = 11 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{r} 7x + 3y = 69 \\ 5x - 2y = 12 \end{array} \right|$ e) $\left| \begin{array}{r} 11x - 13y = -21 \\ 73 = 7x + 9y \end{array} \right|$ f) $\left| \begin{array}{r} x + 4y - 13 = 0 \\ 84y = 5x - 13 \end{array} \right|$

20. Lösen Sie auch die folgenden Aufgaben.

a) $\left| \begin{array}{r} (x + 4)(y + 5) = (x + 7)(y - 4) \\ (x - 2)(y + 5) = (x - 1)(y + 2) \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{r} 9(x - 3) - 10(y + 3) = 18 \\ 6(2x - 9) - 25(y + 4) = 16 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{r} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = -2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4} \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} \frac{3x}{4} + \frac{7}{12} = 2 - \frac{2y}{9} \\ \frac{2y}{5} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{x}{2} \end{array} \right|$

21. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left| \begin{array}{l} 2x = 3y + 7 \\ 4x = y + 9 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{r} 2x + 1 = y \\ 3x = 1.5y - 1.5 \end{array} \right|$ c) $\left| \begin{array}{r} 3x - 6y = -24 \\ 2y = 14 + x \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{r} \frac{2}{5}x = \frac{1}{3}y + 1 \\ 6 = 5y - 6x \end{array} \right|$ e) $\left| \begin{array}{r} x - 1 = -y \\ 4 \cdot (x + 2) = 3x + y - 1 \end{array} \right|$ f) $\left| \begin{array}{r} 2y = -5x - 2 \\ y = \frac{-5}{2}x - 1 \end{array} \right|$

g) $\left| \begin{array}{r} 2(x - 3) = 2y + 7 \\ 4x - 2 = 2y + 1 \end{array} \right|$ h) $\left| \begin{array}{l} y = 3y + x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{array} \right|$ i) $\left| \begin{array}{l} 2x = 3y + 7 \\ 4x = 6y - 9 \end{array} \right|$

22. In welchem Punkt schneiden sich die Geraden

a) $g(x)$: $2x - 3y = 6$ und $h(x)$: $y = -2x + 1$?

b) In welchem Punkt schneiden sich die Geraden $g(x)$: $y = 4x - 8$ und $h(x)$: $y = -x + 3$?

23. Suchen Sie zwei Zahlen, deren Differenz 30 und deren Summe 48 ist.

24. Die Summe zweier Zahlen ergibt 28. Dividiert man die grössere der Zahlen durch die kleinere erhält man 13.

25. Die Gerade g besitzt die Steigung 3 und schneidet die y-Achse bei -5. Die Steigung der Geraden h ist ein Drittel grösser als die Steigung der Geraden g. Der y-Achsenabschnitt beträgt 3. In welchem Punkt schneiden sich die Geraden g und h?

26. Ein Kaufmann kaufte 100 Stck Kugelschreiber und 200 Stck Füllfedern für insgesamt CHF 1700.- ein. Die Kugelschreiber verkaufte er mit einem Zuschlag von 20 % und die Füllfedern mit einem Zuschlag von 25 %. Der Verkaufspreis betrug insgesamt CHF 2100.-. Für wie viel CHF hatte er 1 Stck von jeder Sorte eingekauft?

27. Addiert man eine grössere Zahl mit einer kleineren, so erhält man das 5-fache der kleineren Zahl. Subtrahiert man jedoch die kleinere Zahl von der grösseren, so erhält man 15.

6.6 Exkurs: Mischungsrechnung

Die Aufgaben zu Salzlösungen wurden im Internet gefunden bei Johann Weilharter.

Erinnerung: Eine 20%-ige Lösung hat auf 1 Liter Wasser einen Stoffgehalt von 0.2 Kilogramm. Im Folgenden ist von Salzlösung die Rede. Genauso könnte von Glucoselösung die Rede sein.

28. 2 Liter 70 %-ige Salzlösung (Sole) werden mit 5 Liter Wasser verdünnt. Wie groß ist nun der Salzgehalt?

29. Mit wieviel Liter Wasser müssen 3 Liter 80 %-ige Salzlösung verdünnt werden, damit eine 30 %-ige Salzlösung entsteht?

30. Mit wieviel Liter 30 %-iger Salzlösung müssen 5 Liter 15 %-iger Salzlösung gemischt werden, damit eine 20 %-ige Salzlösung entsteht?

31. 8 Liter 60 %-ige Salzlösung werden mit 2 Liter 40 %-ige Salzlösung gemischt. Welche Salzlösung entsteht?

32. 6 Liter 70 %-iger Salzlösung sollen mit 8 Liter Salzlösung zu einer 50 %-igen Salzlösung gemischt werden. Welche Salzlösung ist zu verwenden?

33. 20 %-ige Salzlösung soll mit 80 %-iger Salzlösung zu 8 Liter 30 %-iger Salzlösung gemischt werden.Wie viele Liter jeder Sorte sind zu verwenden?

Auftrag 6.4

Die folgende Geschichte wurde dem Autoren erzählt von einer Pflegefachfrau:

Frau Meier hat eine schlechte „eingestellte“ Diabetes mellitus Typ II. Heute arbeitet ein junger Assistenzarzt auf „meiner“ Abteilung. Auf der Visite bei Frau Meier fällt ihm sofort der tiefe Blutzuckerwert auf. Der Arzt berechnet nach einem neuen Schema den Glucosebederf von Frau Meier. Die Verordnung lautet: 500 ml Glucose 15% innerhalb einer Stunde zu infundieren. Auf den Hinweis, dass unsere Abteilung nur 10% Glucose und 40% Glucose-Infusionen im Sortiment hat, wird darauf bestanden, dass es wohl möglich sein muss, eine 15% Glucoselösung zu mischen. Mit dem Mischkreuz kann ich nun ganz schnell die Konzentrationen herausfinden.

$$\begin{array}{ccccc}
10 & & & & |40-15| = 25 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 15 & & : \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
40 & & & & |10-15|=5
\end{array}$$

Also muss das Mischverhältnis 25 : 5 bzw. 5 : 1 sein. Auf 5 Teile der einen Lösung kommt ein Teil der anderen Lösung, insgesamt 6 Teile.

Von der 40%-igen Lösung werden 500 : 6 = 83 Milliliter verwendet, von der anderen 417 Milliliter

Nun überprüft die Studierende Petra Ganzgenau den Lösungsvorschlag; einerseits, weil ich mit der Rechnung nicht ganz sicher bin, andererseits ist das eine perfekte Lernsituation für Petra.

a) Prüfen Sie zunächst, ob das Ergebnis richtig ist: werden 500 ml Lösung 15% hergestellt?

b) Liefert dieses Verfahren auch bei der letzten Aufgabe der Salzlösungen die richtige Lösung?

c) Erstellen und prüfen Sie selber ein Beispiel.

d) Stellen Sie jeweils Gleichungssysteme auf und überlegen Sie sich, warum dieses Verfahren bei Mischrechnungen immer zum Ziel führt. Vielleicht finden Sie auch einen guten Ansatz im Internet.

34. Für ein Experiment benötigt ein Laborant 180 ml einer 3%-igen Säure. Im Labor hat er zum Mischen eine 1%- und eine 4%-Lösung dieser Sorte vorrätig. Wie viel von der 1%-igen Lösung muss er mit wie viel von der 4%-igen Lösung mischen?

35. Isopropylaklohol wird in verdünnter Form für kühlende Umschläge benutzt. Ein Apotheker will aus 90%-igem und 10%-igem Isopropylalkohol 300 ml einer 70%-igen Lösung mischen. Wie viel der 90%-igen und der 10%-igen Lösung muss er nehmen?

36. 40 Herr Baumgartner ist die Vollmilch mit einem Fettgehalt von 3.5% zu fett. Die Magermilch mit einem Fettgehalt von 0.3% ist ihm aber zu mager. So entschliesst er sich, beide Sorten zu mischen. Wie viel Liter Vollmilch bzw. Magermilch muss er nehmen, um 4 Liter Milch mit einem Fettgehalt von 1% zu erhalten?

37. Ein Teehändler mischt Tee aus Indien (100 g zu CHF 2.50) und Sri Lanka (100 g zu CHF 3.50). Wie viel muss er von jeder Sorte nehmen, wenn er 2 kg Teemischung zu einem Preis von CHF 2.80 pro 100 g herstellen möchte?

Lösungsverzeichnis