Mathematik FMS

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil, Sommer 2022

Inhalt

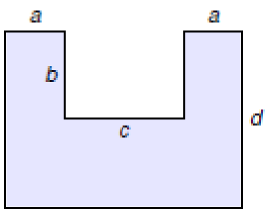
5 Algebraische Terme

5.1 Flächen berechnen

5.1.1 Einstiegsaufgaben

Aufgabe 1

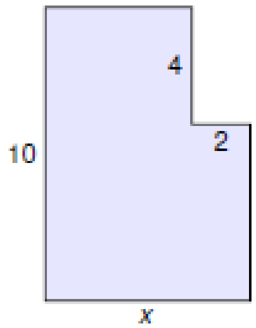
Gegeben ist die folgende Figur:



a) Stellen Sie einen Term auf, der den Umfang der Figur beschreibt und fassen Sie ihn soweit wie möglich zusammen.

b) Stellen Sie einen Term auf, der die Fläche der Figur beschreibt

Aufgabe 2 (Neue Wege 8, 2015)



Rechts ist eine Fläche dargestellt. Diese kann auf mindestens vier Arten berechnet werden:

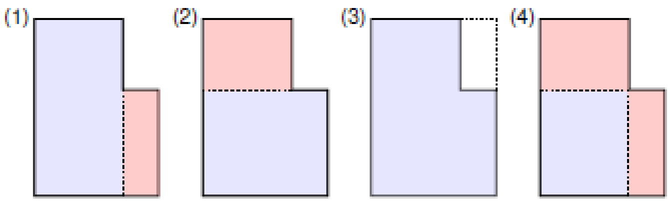
Term A: $10 \cdot (x - 2) + 6 \cdot 2$

Term B: $10 \cdot x - 2 \cdot 4$

Term C: $6 \cdot x + 4 \cdot (x - 2)$

Term D: $6 \cdot (x - 2) + 6 \cdot 2 + 4 \cdot (x - 2)$

a) Ordnen Sie jedem der vier Terme die passende Aufteilung zu



b) Multiplizieren Sie jeweils die Klammern aus und fassen Sie zusammen. Zeigen Sie so, dass alle 4 Terme gleichbedeutend sind.

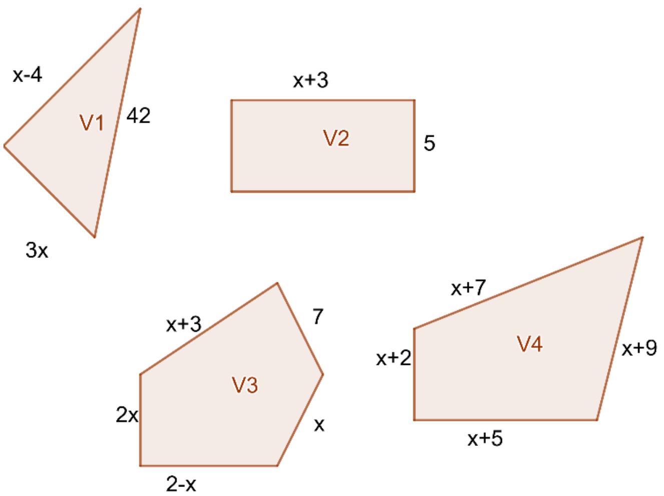
Aufgabe 3 Welche der Formeln für den Umfang passt zu welchem Vieleck?

a) 4x+23

b) 3x+10

c) 4(x+9.5)

d) 2(x+8)



5.2 Terme

5.2.1 Erklärung

« In der Mathematik ist ein Term eine sinnvolle Kombination aus Zahlen, Variablen, Symbolen für mathematische Verknüpfungen und Klammern. Ausgangspunkt sind die atomaren Terme, zu denen alle Zahlen (Konstanten) und Variablen gehören. Terme können als die syntaktisch korrekt gebildeten Wörter oder Wortgruppen in der formalen Sprache der Mathematik gesehen werden. (…)

Im engeren Sinn sind mathematische Gebilde gemeint, die man prinzipiell ausrechnen kann, zumindest wenn man den darin enthaltenen Variablen Werte zugewiesen hat. So ist zum Beispiel $(x+y)^2$ ein Term, denn weist man den darin enthaltenen Variablen x und y einen Wert zu, so erhält auch der Term einen Wert. (…)

Grob kann man sagen, dass ein Term eine Seite einer Gleichung oder Relation, z. B. einer Ungleichung, ist. Die Gleichung oder Relation selbst ist kein Term, sie besteht aus Termen. (…)

Beispiele : ax^3, 5, $-2xy$, $\sqrt{-2(x+y)^3+5(x-ay)^3}$

Gegenbeispiele: $f(x)=3x+4$, $5<7x$, 3(5+, $5\cdot -7$

Aufgabe 4 Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen Term handelt.

a) 6· 7 b) 5a+b c) $-6x^{(3}$ d) $10\cdot 3\ =30$

.e) $\sqrt{1764}$ .f) $\sqrt{-1}$ .g) $x^2\ =-1$

5.2.2 Vorrangregeln in der Algebra und Arithmetik

Sie kennen wahrscheinlich die Regel «Punktrechnung vor Strichrechnung». Anders als die Regel «a+b=b+a» ist das keine Regel, die aus dem Rechnen mit Zahlen notwendig folgt. Wir hätten das auch anders formulieren können. Bei uns heisst also

4· 3+5=12+5=17. Durch die Rechenregel haben wir uns Klammern sparen können. Wir meinen eigentlich (4· 3)+5.

Eine Erweiterung der Vorrangregel ist «Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung. Wieder können wir uns Klammern sparen.

- $3\cdot 4^3$ bedeutet eigentlich $3\cdot (4^3)=3\cdot 64=192$. Die 3 wird nicht potenziert.
- -5^2 ist damit auch erklärt: Das Minus vor der Klammer bedeutet Multiplikation mit (-1), also $-5^2=(-1)\cdot 5^2$ (Vorrangregel) $=(-1)\cdot 25=-25$.
- $(-5)^2=(-5)\cdot(-5)=25$
- Einsetzen von $x=(-5)$ in $-x^2$ gibt $-(-5)^2=(-1)\cdot(-5)\cdot(-5)=-25$

Vereinbarungen für den Umgang mit Termen.

Es gilt die Vorrangregel: Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung.

Malpunkte zwischen Variablen und vor Klammern werden weggelassen, also $a \cdot b = ab$ und $5 \cdot (a \cdot b) = 5ab$.

Die 1, wenn sie multipliziert wird, wird weg gelassen: $1x = x$.

Zahlen werden vor Variablen angeordnet, die Variablen werden alphabetisch geordnet.

Aufgabe 5 Welcher Term passt zu folgendem Text?
Denken Sie sich eine Zahl aus. Addieren Sie zu dieser Zahl 7 und multiplizieren die Summe mit 6.

a) x+7· 6 b) 6· x+7 c) (x+6)· 7 d) (x+7)· 6
e) x· 8· 7 f) x· 6+42

Aufgabe 6 Übersetzen Sie die folgende Rechnung in einen Term
Zu einer Zahl wird 2 addiert. Die Summe wird mit 5 multipliziert. Dann wird 10 abgezogen.

Aufgabe 7 Welche Rechenoperation muss zuletzt ausgeführt werden. Kreisen Sie ein.

a) 5· 8+2 b) 5· 10-2· 4 c) 6+(3+6)· 4 d) 100-2· 29
e) (3+4+5+6+7)· 3 f) 5+4· 9+1 g) (200-32):4

Die letzte Rechenoperation, die ausgeführt wird, bestimmt den Typ des Terms.

a· b+7 ist eine Summe, 3· 4+3· 5 auch. 3(5+a) ist ein Produkt und $(x+y)^2$ ist eine Potenz.

Diese Unterscheidung ist wichtig beim Kürzen von Brüchen, das nur in Produkten möglich ist. $\frac{am}{an} = \frac{m}{n}$. In $\frac{17+34\cdot x}{17\cdot 4}$ kann nicht direkt gekürzt werden. Auch nicht in $\frac{x^2-y^2}{x-y}$. Nach geeigneten Termumformungen ist es dann allenfalls doch möglich.

Aufgabe 8 Entscheiden Sie bei der vorigen Aufgabe, welcher Typ Term es ist.

5.3 Terme umformen

5.3.1 Regeln anwenden

Gesetze für den Umgang mit Termen.

Kommutativgesetze: $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetze: $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = ab + ac$

Aufgabe 9 Multiplizieren Sie aus

a) $5 \cdot (3 + b)$ b) $8 \cdot (1 + 4 + a)$ c) $6x - (-x + 1)$
d) $5n \cdot (-3 - m)$ e) $a + (-3 \cdot x)$ f) $(3a + 5d) \cdot 2a$

Aufgabe 10 Fassen Sie zusammen

a) $3x + 5x$ b) $12x - 12 + x + 4$ c) $4ab + 2ac - ab$
d) $a + 2b - 4a + 5a$ e) $5x + 7 - 2x - 3x$ f) $2ab \cdot 3 + b \cdot a$

Aufgabe 11 Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen

a) $12x - 12 \cdot (y + 2 \cdot x)$ b) $3x \cdot 5y \cdot 2$ c) $(a + b) \cdot a - (a^2 + ab)$
d) $2(x + y) - 2y$ e) $(9x - 12y): 3 - x$ f) $5 \cdot (x - 3) + 4x$

Aufgabe 12 Setzen Sie die Zahl **5** ein und berechnen Sie den Wert des Terms

a) $32 + 2 \cdot x$ b) $(a + 5)^2$ c) $n: 5 - 3n$

Aufgabe 13 Multiplizieren Sie aus.

a) $2 \cdot (x + y)$ b) $3a - (-2b)$ c) $(u - v)(u + v)$

(diese Aufgabenserie stammt aus Roder, 2019.)

Zwei Terme heissen äquivalent, wenn Sie für jede Einsetzung der Variablen den gleichen Wert ergeben.

Beispiel: $(x + y)^2$ und $x^2 + 2xy + y^2$ sind äquivalent: Egal, was für x oder y eingesetzt wird, es kommt immer das gleiche heraus.

Termumformungen sind : das Anwenden der Rechengesetze und das Zusammenfassen gleichartiger Terme durch die Grundrechenarten.

Beispiele: $c(a + 9)$ ist äquivalent zu $ac + 9c$,

$4x + 5x + 6x$ ist äquivalent zu $15x$,

$\frac{12}{b}$ ist äquivalent zu $\frac{3}{b} + \frac{9}{b}$.

5.3.2 Faktorisieren

Der Bruch $\frac{a^2+ab}{a}$ lässt sich kürzen, indem im Zähler a ausgeklammert wird:

$$\frac{a^2 + ab}{a} = \frac{a(a + b)}{a} = a + b$$

Faktorisieren: Die Idee beim Ausklammern ist es, ein Rechengesetz «rückwärts anzuwenden»,

also zum Beispiel $ab + ac = a(b + c)$ oder $ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$.

Aus einer Summe wird so ein Produkt. Dieser Vorgang heisst **Faktorisieren.**

Aufgabe 14 Klammern Sie x aus

a) xy+4x b) 2xy+4x+6xz c) 3xz+xy+x d) $5x^2+5x$

Aufgabe 15 Klammern Sie möglichst viel aus – Faktorisieren Sie.

a) xyz+3xy+7xyz b) 5ab+10ac+35ax c) 0.5xy+1xz+1.5xv

d) 2xy+4ab+42pq e) $36a - 12a^2$ f) $150xy+200xz+150x^3$

g) $5x^2+5x$ h) 120pq-60pr-60p

Aufgabe 16 Kürzen Sie, indem Sie vorab im Zähler oder Nenner faktorisieren

a) $\frac{8x-12}{4}$ b) $\frac{2x-x^2}{x^2}$ c) $\frac{35a-42}{-7}$ d) $\frac{x^2}{x-x^2}$ e) $\frac{5x+10}{3x+6}$

Aufgabe 17 Faktorisieren Sie $a \cdot c + a \cdot 7 + 3 \cdot c + 3 \cdot 7$

5.3.3 Der Zweiklammeransatz

Es geht um spezielle Terme, in denen nur eine Variable und Zahlen vorkommen.

$$(x+2)(x+3) = x \cdot x + 2 \cdot x + 3 \cdot x + 2 \cdot 3 = x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$$

Wir beobachten, dass die 5 am Ende die Summe von 2 und 3 ist. Die 6 ist das Produkt von 2 und 3. Das geht immer

$(x+5)(x+2) = x^2 + 7x + 10$ und auch $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$

Zweiklammeransatz : Hier sind a, b, p und q vorgegebene Zahlen, nur x ist die Variable:

Wenn wir einen Term der Form $(x^2 + px + q)$ faktorisieren, so ergibt sich $(x+a)(x+b)$ mit $a + b = p$ und $a \cdot b = q$

Aufgabe 18 Faktorisieren Sie mit dem Zweiklammeransatz

a) x^2+6x+8 b) $x^2+12x+36$ c) $x^2+9x+20$ d) x^2+x-20

e) x^2-x-20 f) $x^2-9x+20$ g) $x^2-7x+12$ h) $x^2+2.5x+1$

5.4 Binomische Formeln

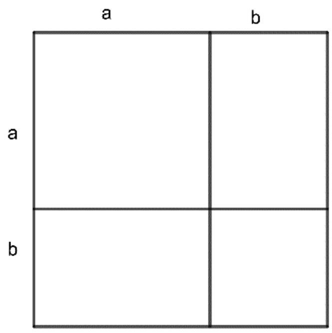
Binomische Formeln :

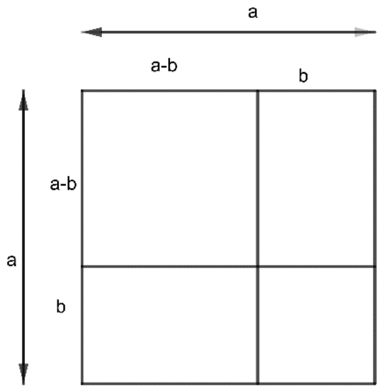
1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

3) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Aufgabe 19 Nutzen Sie die beiden Bilder, um die ersten beiden binomischen Formeln zu visualisieren.





Aufgabe 20 Besuchen Sie die folgende Website. Erstellen Sie einige Skizzen mit Begründungen, die die dritte binomische Formel erklären.
https://www.geogebra.org/m/Pd53gvDw
Finden Sie eine Herleitung für die dritte binomische Formel, die Ihnen besser gefällt?

Aufgabe 21 Multiplizieren Sie aus

a) $(c-2d)^2$ b) $(-8m-7)^2$ c) $(-8q-1)(8q-1)$
d) $(-a+b)^2$ e) $(-a-b)^2$ f) $(2a+16)^2$
g) $(xy-yz)^2$ h) $(2x+5)(2x-5)$ i) $(9uv^2-1)(9uv^2+1)$
j) $(z^2+3z)^2$

Aufgabe 22 Nutzen Sie die binomischen Formeln, um die Rechnungen zu vereinfachen.

a) $(100+1)^2$ b) $(2+0,4)^2$ c) 69^2

Aufgabe 23 Stimmen die folgenden Gleichungen für alle Einsetzungen? Handelt es sich also um Termumformungen?

a) $(x+y)^2 = (-x-y)^2$ b) $(n-1)^4 = (1-n)^4$
c) $(a+b)^3 = -(-a+b)^3$ d) $(u^2-v^2)^5 = -(v^2-u^2)^5$

Aufgabe 24 Stellen Sie als Produkt dar.

a) $9q^2-6q+1$ b) $16m^2-9n^2$ c) $25x^2-1$
d) $5a^2-10ab+5b^2$ e) $36u^2+60uv+25v^2$ f) $v^2\,4c^2-9d^2$
g) $6a^2-6b^2$ h) $q^2r^2-4qr+4$ i) $16r^2-24rs+9s^2$
j) $4c^2+28cd+49d^2$

Aufgabe 25 zerlegen Sie, wenn möglich, den Term mit Hilfe von binomischen Formeln so weit wie möglich. Sagen Sie, wenn es nicht möglich ist.

a) $8x^2-24x+18$ b) $2x^2-18$ c) x^2+16
d) $75x^2-60x+48$ e) $4x^2-12x+9$ f) $5x^2-5$

5.5 Lösungen zu den Übungen und Quellen

5.5.1 Lösungen zu den Übungen

1 a) zum Beispiel 4a+2b+2c+2d b) zum Beispiel $(2a+c)\cdot d-b\cdot c$

2 a) A – (1) B – (3) C – (2) D – (4) b) alle sind gleich 10x-8

3 V_1 – c V_2 – d V_3 – b V_4 - a

4 a ja, b ja, c nein, d nein, e ja, f ja, g nein

5 d und f

6 zum Beispiel (a+2)· 5-10

7 a +, b - , c +, d -, e · , f +, g :

8 a Summe, b Differenz, c Summe, d Differenz, e Produkt, f Summe, g Quotient

9 a) 15+5b b) 40+8a c) 7x-1
d) $-15n-5nm$ e) $a-3x$ f) $6a^2+10ad$

10 a) 8x b) 13x-8 c) 3ab-2ac
d) 2a+2b e) 7 f) 7ab

11 a) $-12x-12y$ b) 30xy c) 0
d) 2x e) $2x-4y$ f) 9x-15

12 a) 42 b) 100 c) -14

13 a) 2x+2y b) 3a+2b
c) $24x^2+(-6x)$ d) $u^2+(-v^2)$

14 a) x(y+4) b) x(2y+4+76z) c) x(3z+y+1) d) x(5x+5)

15 a) xy(z+3+7z) b) 5a(b+2c+7x) c) 0.5x(y+2z+3v)

d) 2(xy+2ab+21pq) e) 12a(3-a) f) $50x(3y+4z+3x^2)$

g) 5x(x+1) h) 60p(2q-r-1)

16 a) $2x-3$ b) $\frac{2-x}{x}$ c) $-5a+6$
d) $\frac{x}{1-x}$ e) $\frac{5}{3}$

17 (a+3)· (c+7)

18 a)(x+2)(x+4) b) (x+6)(x+6) c(x+4)(x+5)

d) (x-4)(x+5) e) (x+4)(x-5) f) (x-4)(x-5)

g) (x-3)(x-4) h) (x+0.5)(x+2)

19 In die vier Flächen jeweils schreiben, wie gross sie sind. Zusammenzählen der vier Flächenmasse gibt die erste binomische Formel. Bei der zweiten Fläche geht es wieder um die Multiplikation zweier negativer Zahlen. Verwenden verschiedener Zahlen hilft.

20 Bei (a+b)(a-b) wird im Vergleich zu a^2 eine Fläche vom Mass ab weggenommen. Und nur eine Fläche vom Mass (a-b)b=ab—b^2 dazu getan.

21 *a)* $c^2 - 4cd + 4d^2$ b) $64m^2 + 112m + 49$ c)$-64q^2 + 1$
d) $a^2 - 2ab + b^2$ e) $a^2 + 2ab + b^2$ f) $4a^2 + 64a + 256$
g) $x^2y^2 - 2xy^2z + y^2z^2$ h) $4x^2 - 25$ i) $81u^2v^2 - 1$
j) $z^4 + 6z^3 + 9z^2$

22 a) 10201 b) 5.76 c) 4761

23 a – ja b – ja , c – nein, d – ja

24 a) $(3q + 1)^2$ b) $(3q + 1)^2$ c) $(5x + 1)(5x - 1)$
d) $5(a - b)^2$ e) $(6u + 5v)^2$ f) $(2c - 3d)(2c + 3d)$
g) $6(a - b)(a + b)$ h) $(qr - 2)^2$ i) $(4r - 3s)^2$
j) $(2c + 7d)^2$

25 a) $2(2x - 3)$ b) $2(x + 1)(x - 1)$ c) nicht zu vereinfachen
d) $3(5x - 4)$ e) $(2x - 3)^2$ f) $5(x + 1)(x - 1)$

5.5.2 Quellen

- Neue Wege Mathematik 8, Arbeitsbuch für Gymnasien, Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, 2015
- Roder, U. (2019): basics-mathematik.de