

# Mathematik FMS



**Torsten Linnemann**  
**Gymnasium Oberwil, Sommer 2022**

## Inhalt

1	Zahlbereiche.....	2
1.1	Natürliche Zahlen .....	2
1.2	Negative Zahlen.....	4
1.3	Bruchzahlen.....	6
1.4	Dezimalzahlen, Bruchzahlen und reelle Zahlen .....	10
1.5	Lösungen .....	12

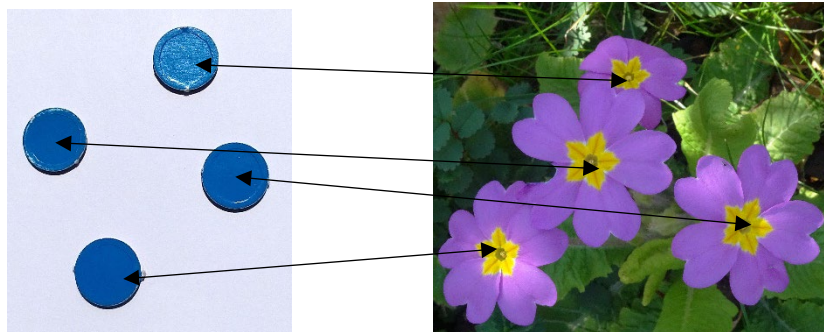
# 1 Zahlbereiche

## 1.1 Natürliche Zahlen

Zunächst gibt es eine Einführung in die natürlichen Zahlen, also 1, 2, 3 und so weiter. Addition und Multiplikation werden erklärt. Das erscheint erst einmal sehr einfach. Mit dieser Erklärung können dann aber auch andere Sachen erklärt werden: die Bruchrechenregeln, das Multiplizieren zweier negativer Zahlen und schliesslich auch die Gesetze für Termumformungen in der Algebra.

**Natürliche Zahlen** sind die Zahlen 1, 2, 3 ... und so weiter. Es gibt keine grösste natürliche Zahl. Durch Abzählen lässt sich feststellen, wie viele Objekte vorhanden sind.

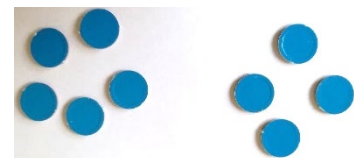
Es lässt sich leicht feststellen, ob zwei Mengen die gleiche Anzahl Elemente haben. Hier zum Beispiel 4 Wendepfannkuchen und 4 Blumen.



Die Zahl 4 ist damit eine Eigenschaft, die alle Mengen mit der gleichen Anzahl Elemente gemeinsam haben.

Und die Zahl 5 ergibt sich, indem ein Element hinzugefügt wird.

Addition bedeutet, Mengen zusammenzuführen und die Elemente zu zählen.



Im Bild rechts also 5+4

Von nun an werden wir die Wendepfannkuchen anordnen, so dass das Bild von 5+4 sich ergibt als:



Mit dieser Interpretation können wir nun die Rechengesetze für die Addition erklären.

**Kommutativgesetz der Addition** : Die Reihenfolge spielt bei der Addition keine Rolle.

$$a + b = b + a$$

Begründung: einfach das Bild um 180 Grad drehen. So wird aus 5+4 sofort 4+5

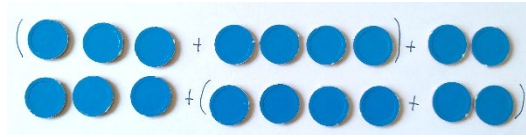


Das nächste Rechengesetz ist oft wichtig, um Rechnungen zu vereinfachen. Statt  $(6+28)+12$  lässt sich rechnen  $6+(28+12)$ , was die Zehnerüberträge einfacher macht.

**Assoziativgesetz der Addition** : Bei der Addition spielen Klammern keine Rolle.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Begründung: Beide Rechnungen enthalten die gleiche Anzahl Plättchen.

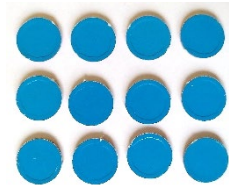


Die Multiplikation wird erklärt als wiederholte Addition.

$$\text{Also } 3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$$

Zentral ist es nun zu erkennen, dass damit eine Fläche definiert wird.  $3 \cdot 4$  ist die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen 3 und 4.

Und  $6 \cdot 9$  ist die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen 6 und 9.



**Satz:** Das Rechteck mit den Seitenlängen  $m$  und  $n$  hat die Fläche  $m \cdot n$

Wir können nun die Wendeplättchen weglassen und einfach Flächen zeichnen. Mit diesem Satz lassen sich nun alle Rechengesetze, die die Multiplikation betreffen, erklären.

Dieser Satz wird problematisch, wenn mit Einheiten wie zum Beispiel Zentimeter gearbeitet wird. Dann ist  $3 \cdot 4 = 12$

- zum einen eine Fläche, mit Flächeneinheit Quadratzentimeter, und
- zum anderen 3 Mal die Länge 4, also 12 Zentimeter.

Solange ohne Einheiten gerechnet wird wie in den Beispielen mit den Wendeplättchen, ergeben sich aber keine Probleme mit der Interpretation.

### Aufgabe 1

Erklären Sie den folgenden Zusammenhang. Arbeiten Sie mit der Interpretation als Fläche und begründen Sie (analog zum Kommutativgesetz der Addition), dass beide Flächen gleich sind.

**Kommutativgesetz der Multiplikation** : Bei der Multiplikation spielt die Reihenfolge keine Rolle:  $a \cdot b = b \cdot a$

### Aufgabe 2

Erklären Sie den folgenden Zusammenhang. Arbeiten Sie mit der Interpretation als Fläche und begründen Sie (analog zum Kommutativgesetz der Addition), dass beide Flächen gleich sind. Zur Veranschaulichung können Sie das Beispiel  $3 \cdot (4 + 5)$  verwenden.

**Distributivgesetz der Multiplikation** : Eine Klammer, die aus einer Summe besteht) wird mit einer Zahl multipliziert, indem jeder Summand in der Klammer mit der Zahl multipliziert wird:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

**Aufgabe 3** «Malkreuz», Klammern ausmultiplizieren

Veranschaulichen Sie nun, dass folgende Regel zum Ausmultiplizieren von Klammern gilt:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Hinweis: die Malpunkte zwischen den Variablen wurden hier weggelassen. Veranschaulichen Sie das zugehörige Rechteck mit den Seitenlängen  $a + b$  und  $c + d$ .

**Aufgabe 4** Hier kommt zuerst das zu erklärende Gesetz, und dann der Auftrag

**Assoziativgesetz der Multiplikation** :  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- Hier muss also nicht jedes Glied der Klammer mit  $c$  multipliziert werden. Rechnen Sie das am Beispiel nach  $(3 \cdot 4) \cdot 5$  und  $(3 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5)$ .
- Ein Quader hat das Volumen «Grundfläche · Höhe». Interpretieren Sie zuerst  $(a \cdot b)$  als Grundfläche, kippen Sie den Quader dann, so dass  $(b \cdot c)$  zur Grundfläche wird und erklären Sie damit den Zusammenhang. Hier müssen Sie also Quader skizzieren.

**Aufgabe 5** Detti behauptet, dass  $327 \cdot 438 = 300 \cdot 400 + 20 \cdot 30 + 7 \cdot 8 = 120'654$ . Skizzieren Sie eine Fläche, die zur Aufgabe passt, und erklären Sie den Fehler.

## 1.2 Negative Zahlen

Das Hauptproblem bei den negativen Zahlen ist die Definition der Multiplikation negativer Zahlen: «Minus mal Minus gibt Plus». Negative Zahlen lassen sich noch recht gut erklären: Schulden, negative Temperaturen. Die Multiplikation zweier negativer Zahlen ist im Zusammenhang aber meist sehr konstruiert. Wir gehen hier den innermathematischen Weg, und wollen das Rechnen mit negativen Zahlen so einrichten, dass die Rechengesetze weiter gültig bleiben. Dabei hilft uns dann wieder, die Multiplikation als Fläche zu sehen. Die Definition negativer Zahlen erfolgt über die Gleichung  $a + (-a) = 0$  und nicht über die Rechnung  $b - a$ .

**Definition negativer Zahlen** : Die Zahl  $-a$  ist diejenige Zahl, die mit  $a$  addiert Null ergibt. Also

$$a + (-a) = 0.$$

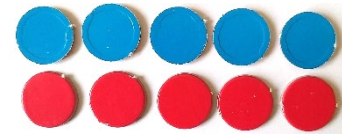
Die Schreibweise  $b - a$  ist eine Abkürzung für  $b + (-a)$ .

Die natürlichen Zahlen und die Negativen der natürlichen Zahlen bilden zusammen mit der Null den Zahlbereich der ganzen Zahlen:

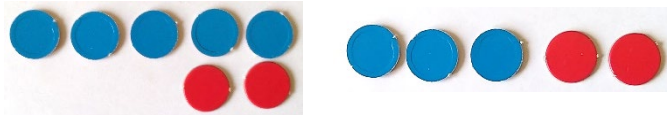
Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  sind die Zahlen  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Also ist die 0 eine ganze Zahl, und auch die 42, und -13. Nicht aber -0.5

Anschaulich ist es aber das bekannte Wegnehmen. Rechts sehen Sie eine Visualisierung von  $5 + (-5)$ . Negative Zahlen werden hier meist in rot visualisiert.



Unten finden Sie zwei Visualisierungen von  $5 - 2 = 3$ .



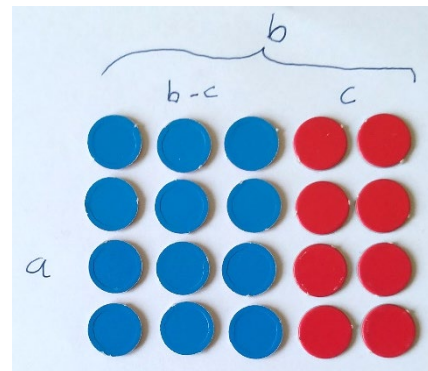
**Multiplikation mit einer negativen Zahl:** Für zwei positive Zahlen  $a$  und  $c$  gilt

$$a \cdot (-c) = -(ac)$$

Das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl ist also negativ.

Die Begründung erfolgt mit der Flächeninterpretation und dem Distributivgesetz:

Die Multiplikation von  $a$  mit  $b - c$  ist die blaue Fläche. Das ist das gleiche, wie wenn von  $ab$  die Fläche  $ac$  abgezogen wird. Damit dieses Flächenbild weiter gilt muss  $a \cdot (-c)$  negativ sein.



**Aufgabe 6** Minus Mal Minus gibt Plus

Diese Regel kann mit Hilfe der Fläche  $(a - b) \cdot (c - d)$  visualisiert und begründet werden. Das soll nun am Beispiel  $a=5, b=1, c=6$  und  $d=2$  durchgeführt werden. Verwenden Sie dafür Wendeplättchen, oder einfach rechteckige Papierstücke vom Mass  $a \cdot c = 5 \cdot 6, a \cdot d = 5 \cdot 2, b \cdot c = 1 \cdot 6$  und  $b \cdot d = 1 \cdot 2$ . Legen Sie die Stückchen so übereinander, dass die Fläche  $(a - b) \cdot (c - d)$  entsteht. Interpretieren Sie die Vorzeichen, die zu den Flächenstücken gehören.

**Multiplikation zweier negativer**

**Zahlen :**

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Und insbesondere :

$$(-b) \cdot (-d) = bd$$

Das Negative einer negativen Zahl ist  $-(-a) = a$ .

Wir wissen bereits: Wenn wir mit einer negativen Zahl multiplizieren, so kehrt sich das

Vorzeichen. Damit gilt  $(-1) \cdot a = -a$ . Für  $-a$  können wir also  $(-1)a$  schreiben. Also  $-(-a) = (-1) \cdot (-a) = 1 \cdot a = a$

**Aufgabe 7** Berechnen Sie ohne Taschenrechner

a)  $(5 - 3) \cdot (7 - 10)$       b)  $(3 - 5) \cdot (2 - 9)$       c)  $(8 - 6) \cdot (15 - 3)$

d)  $(8 - 6) \cdot (7 - 9) \cdot 5$       e)  $(27 - 5) \cdot (15 - 8 - 7)$

**Aufgabe 8** Rechnen Sie auf zwei Arten ohne Taschenrechner

a)  $(12 - 6) \cdot (14 - 7)$       b)  $(10 + 3) \cdot (20 + 7)$

**Aufgabe 9** Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

a)  $6 - (5 - (4 - (3 - (2 - 1))))$       b)  $6 \left( - \left( 4(-3(-2 - 1)) \right) \right)$

### 1.3 Bruchzahlen

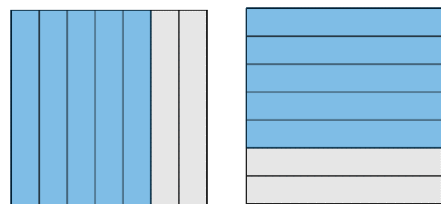
#### 1.3.1 Brüche im Rechteckmodell

Der innermathematische Grund, negative Zahlen einzuführen, waren unlösbare Gleichungen, wie zum Beispiel  $7 + x = 5$  oder  $2 + x = 0$ . So lassen sich auch die Brüche einführen

Der Bruch  $\frac{m}{n} = x$  ist die Lösung der Gleichung  $nx = m$ .

Der Bruch  $\frac{5}{7}$  löst die Gleichung  $7x = 5$ .

Eine mögliche Visualisierung von  $\frac{5}{7}$  ist, sich ein Ganzes in 7 Teile aufgeteilt vorzustellen, und davon 5 Teile zu nehmen. In welche Richtung die Streifen gehen, spielt keine Rolle. Die Kantenlänge des hier dargestellten Quadrats ist also 1. Wir müssen wieder darauf achten, uns keine Einheiten vorzustellen.



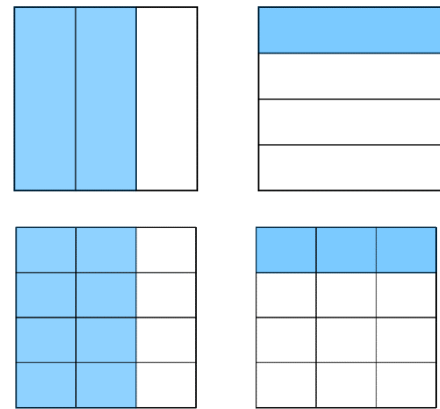
Die untere Zahl, die 7, benennt also, wie gross die Stücke sind: die untere Zahl heisst Nenner. Die obere Zahl zählt, wie viele Stücke vorhanden sind: der Zähler.

1.3.2 Addition und Subtraktion

**Beispiel :**  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ .

Die beiden Brüche sind rechts dargestellt. Das Problem ist, dass die dargestellten Streifen rechts und links verschiedene Flächen haben. Wir können nicht einfach etwas addieren.

Zunächst müssen die Flächenstücke gleich gross sein. Wir teilen die Quadrate noch einmal auf: das erste Quadrat in 4 Stücke, die Linien sind senkrecht zu den bereits bestehenden. Und genauso mit dem zweiten Quadrat.



Nun sind beide Quadrate in gleich grosse Stücke aufgeteilt – in  $3 \cdot 4 = 12$  Stücke. Im ersten Quadrat haben wir  $2 \cdot 4 = 8$  Stücke, im zweiten  $1 \cdot 3 = 3$  Stücke. Insgesamt  $8 + 3 = 11$  Stücke. Also:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

Dieses Vorgehen können wir verallgemeinern.

Wenn  $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$  rechnen, müssen wir zuerst «verfeinern»=erweitern auf  $n \cdot q$  Stücke. Im Zähler gibt das im ersten Bruch  $m \cdot q$  Stücke, im zweiten gibt es  $p \cdot n$  Stücke. Insgesamt

**Addition von Brüchen:**  $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+pn}{nq}$ . Analog die Subtraktion:  $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq-pn}{nq}$

**Beispiele und die Einführung des Kürzens.**

- $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{10+15}{20} = \frac{25}{20}$  Das sind 25 Stücke, die jeweils  $\frac{1}{20}$  gross sind. Davon lassen sich jeweils 5 Stücke zusammenfassen. Das gibt 5 Stücke im Zähler, und vier im Nenner. Wir erhalten den gekürzten Bruch  $\frac{5}{4}$ . Zum Kürzen müssen Zähler und Nenner in Faktoren zerlegt werden. Die gleichen Faktoren können gekürzt werden.

$\frac{25}{20} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{5}{4}$ . Übrigens ist dieser Bruch grösser als 1. Dafür gibt es die Schreibweise  $1 \frac{1}{4}$ . Das werden wir aber nicht weiter verwenden.

- $\frac{13}{39} - \frac{3}{4}$ . Wenn wir hier erweitern, ergeben sich hohe Zahlen. Der erste Bruch lässt sich aber bereits kürzen. Wir rechnen also:  $\frac{13}{39} - \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 13}{3 \cdot 13} - \frac{3}{4} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{4}{12} - \frac{9}{12} = \frac{-5}{12}$ .

Hier haben wir  $-5$  Teile im Zähler, eine negative Zahl. Ebenso ist es, wenn wir im Nenner eine negative Zahl haben. Das führt zu:

$-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$ . Die letzte Variante ist zur Darstellung eines Bruchs im Endergebnis nicht gebräuchlich, die ersten beiden schon.

## 1.3.3 Multiplikation von Brüchen.

Zunächst die Multiplikation eines Bruchs mit einer natürlichen Zahl:

**Beispiel :**  $3 \cdot \frac{5}{7}$ . Dieser Bruch bedeutet, dass wir 5 Stücke haben, die jeweils  $\frac{1}{7}$  gross sind.

Wenn wir das mal drei nehmen, haben wir 15 Stücke der gleichen Grösse. Also  $3 \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{7}$

**Multiplikation mit einer natürlichen Zahl :**  $a \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$

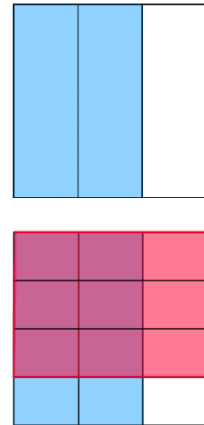
Bei der Multiplikation zweier Brüche können wir die Vorstellung als Teil eines ganzen brauchen.

**Beispiel :**  $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ .

Wir gehen aus von  $\frac{2}{3}$ . Davon brauchen wir  $\frac{3}{4}$ . Das heisst, wir teilen das Ganze noch einmal in vier Teile auf. Vom blau markierten Stück brauchen wir nur 3 von Vieren. Das wird noch deutlicher, wenn wir die Aufteilung einzeichnen.

Wir haben nun  $4 \cdot 3 = 12$  Teile, von denen  $2 \cdot 3$  doppelt gefärbt sind. Also:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12}$$



**Multiplikation von Brüchen:**  $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$

Das Kürzen ist wieder wichtig.

## Beispiele und der Umgang mit dem Kürzen

- Bereits in unserem Ausgangsbeispiel hätten wir kürzen können:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} \text{ (Hier lässt sich 3 kürzen)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

## 1.3.4 Division von Brüchen

Die Regeln werden plausibel gemacht, ohne das Flächenmodell zu nutzen. Wir nutzen die Interpretation des Teilens als «passen in»:

**Beispiel:** Was ist  $20 : \frac{1}{2}$ ? Das wird mit einer kleinen Geschichte erklärt.

Wir haben 20 Äpfel. Wie viele Teller braucht es, wenn auf jedem Teller 5 Äpfel liegen sollen?

Wie oft passen 5 Äpfel in 20 Äpfel?  $20 : 5 = 4$  (Wir brauchen 4 Teller)

Wie oft passen 4 Äpfel in 20 Äpfel?  $20 : 4 = 5$  (Wir brauchen 5 Teller)

Wie oft passen 2 Äpfel in 20 Äpfel?  $20 : 2 = 10$  (Wir brauchen 10 Teller)

Nun kommt auf jeden Teller nur ein halber Apfel.



Wie oft passt  $\frac{1}{2}$  Apfel in 20 Äpfel?  $20 : \frac{1}{2} = 40$  (Wir brauchen 40 Teller.)

Genauso lässt sich die Rechnung  $60 \cdot \frac{1}{5}$  übersetzen in: Wie oft passt  $\frac{1}{5}$  in 60? Also 300.

Ich habe 10 Glas Konfitüre, von der ich jeden Tag  $\frac{1}{4}$  Glas esse. Die Konfitüre reicht für  $10 : \frac{1}{4} = 40$  Tage.

Wir müssen also mit dem Nenner multiplizieren. Das geht mit allen Zahlen, und wir erhalten.

**Division durch einen Bruch mit 1 im Zähler:**  $a : \frac{1}{q} = a \cdot q$

Nun zum Fall Bruch: Bruch

Beispiel :  $\frac{5}{6} : \frac{3}{5}$ . Um zu sehen, was hier passiert, erweitern wir beide Brüche auf  $6 \cdot 5 = 30$ . Der erste Zähler wird zu  $5 \cdot 5 = 25$  und der zweite zu  $3 \cdot 6 = 18$ . Wir erhalten  $\frac{25}{30} : \frac{18}{30}$ .

Wie oft passen  $\frac{18}{30}$  in  $\frac{25}{30}$ ?

Wir reden also von Stücken, die jeweils  $\frac{1}{30}$  gross sind. Aber die Grösse der Stücke spielt eigentlich keine Rolle. Wir können uns genauso gut überlegen, wie oft 18 in 25 passt. Das entspricht der Division  $25 : 18$ . Und wenn wir uns noch überlegen, wie die 18 und die 25 zustande kamen, so ergibt sich  $\frac{5}{6} : \frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 6} : \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 6}$ .

Ersetzen wir unser Zahlenbeispiel durch Buchstaben, so erhalten wir die allgemeine

**Bruchrechenregel für die Division**

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}$$

### 1.3.5 Die rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  umfassen alle Brüche  $\frac{p}{q}$ , wobei  $p$  eine ganze Zahl ist und  $q$  eine natürliche Zahl.

Beispiele sind also  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{17}{4}$ ,  $-\frac{2}{5}$  aber auch 7 oder -5, denn  $-5 = \frac{-5}{1}$ . Brüche werden im Endergebnis immer gekürzt dargestellt,  $\frac{2}{4}$  ist kein zulässiges Ergebnis.

**Aufgabe 10** Berechnen Sie ohne Taschenrechner

a)  $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$

b)  $\frac{9}{12} + \frac{5}{9}$

c)  $\frac{7}{4} - \frac{5}{6}$

d)  $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6}$

e)  $\frac{-3}{9} \cdot \frac{12}{8}$

f)  $-\frac{2}{5} : \frac{3}{5}$

g)  $\frac{34}{17} : \frac{2}{42}$

h)  $30 \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{17}{5}\right)$

i)  $30 \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{17}{5}\right)$

## 1.4 Dezimalzahlen, Bruchzahlen und reelle Zahlen

### 1.4.1 Bruchzahlen in Dezimalzahlen verwandeln und umgekehrt

Eine ausführlichere Darstellung dieser Zusammenhänge findet sich als Screencast:

[https://www.material.tolinnemann.ch/PH\\_FHNW/Prim\\_FW11/rationale\\_zahlen/210430\\_dezimalzahlen.mp4](https://www.material.tolinnemann.ch/PH_FHNW/Prim_FW11/rationale_zahlen/210430_dezimalzahlen.mp4)

Eine Dezimalzahl ist beispielsweise 234.357 oder auch  $17.42424242\dots = 17.\overline{42}$ . So wie die Zahlen vor dem Komma Einer, Zehner, Hunderter usw. bedeuten, so bedeuten die Zahlen nach dem Komma Zehntel, Hundertstel usw. Also ist  $0.2 = 2$  Zehntel  $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ . Abbrechende Dezimalzahlen lassen sich also einfach in Brüche umwandeln. Wie ist es aber mit periodischen Dezimalzahlen? Dazu betrachten wir zunächst einmal eine Division, beispielsweise  $8:17$ . Bei der schriftlichen Division können in den einzelnen Schritten nur die Reste 1 bis 16 übrig bleiben. Falls einmal die Null als Rest kommt, bricht die Division ab. Spätestens nach 16 Schritten wiederholen sich die Rechnung

Wird ein Bruch durch eine schriftliche Division in einen Dezimalbruch entwickelt, so bricht die Darstellung irgendwann ab, oder es gibt eine Periode.

Nun wird kurz erklärt, wie sich aus einem Dezimalbruch ein Bruch finden lässt.

**Beispiel :**  $17.\overline{42}$ .

Wir multiplizieren

$x = 17.\overline{42} = 17.42424242\dots$  mit 100 und erhalten

$100x = 1742.424242\dots$  Die beiden voneinander abgezogen gibt

$99x = 1742.424242\dots - 17.424242\dots = 1725$ . Umformen ergibt

$$x = \frac{1725}{99} = 17.\overline{42}$$

Analog lassen sich alle Perioden der Länge 2 in Brüche mit dem Nenner 99 entwickeln, Perioden mit der Länge 3 in den Nenner 999 und so weiter. Und mit der Periodenlänge 1 ergibt sich beispielsweise:

$$0.\overline{3} = \frac{3.3333\dots - 0.3333\dots}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

**Aufgabe 11** Verwandeln Sie in eine Dezimalzahl

a)  $\frac{1}{9}$       b)  $\frac{1}{125}$       c)  $\frac{3}{7}$       d)  $\frac{1}{8}$

**Aufgabe 12** Verwandeln Sie in einen Bruch

a) 0.125      b) 73.3      c)  $0.\overline{34}$       d)  $0.\overline{1}$   
 e)  $0.\overline{324}$       f)  $1.\overline{324}$

### 1.4.2 Reelle Zahlen

Alle Brüche lassen sich also als periodische Dezimalzahlen oder abbrechende

Dezimalzahlen schreiben. Damit bietet sich die folgende Erweiterung der Zahlbereiche an.

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  bestehen aus allen Dezimalzahlen, positive und negative, abbrechende, periodische und nicht periodische.

Die neu eingeführten nicht abbrechenden Dezimalzahlen nennen wir irrationale Zahlen.

Es stellt sich die Frage, ob es diese Erweiterung überhaupt braucht.

Ja. Und das können wir wieder mit einer Gleichung begründen.

Wir suchen die Wurzel aus 2, also die Zahl  $x$ , deren Quadrat 2 ist:  $x^2=2$ .

Wir können diese Zahl als Dezimalzahl entwickeln, indem wir geeignete Kandidaten mit immer mehr Kommastellen quadrieren. Also:

$$1 \cdot 1 < 2 < 2 \cdot 2$$

$$1.4 \cdot 1.4 < 2 < 1.5 \cdot 1.5$$

$$1.41 \cdot 1.41 < 2 < 1.42 \cdot 1.42$$

Die Wurzel aus 2 liegt also zwischen 1.41 und 1.42. Es lässt sich zeigen, dass die Wurzel aus 2 keine rationale Zahl ist. Auf Wikipedia findet sich ein Beweis:

[https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis\\_der\\_Irrationalit%C3%A4t\\_der\\_Wurzel\\_aus\\_2\\_bei\\_Euklid](https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_der_Irrationalit%C3%A4t_der_Wurzel_aus_2_bei_Euklid)

Es ist sogar so, dass die Wurzel jeder natürlicher Zahl eine irrationale Zahl ist – ausser die Ausgangszahl war eine Quadratzahl.

Können wir nun jede Gleichung lösen in uns bekannten Zahlbereichen?

### 1.4.3 Bruchzahlen oder Dezimalzahlen?

Dieser Abschnitt gibt Antworten zur Frage, ob als Ergebnis eine Bruchzahl oder eine Dezimalzahl gewählt werden soll.

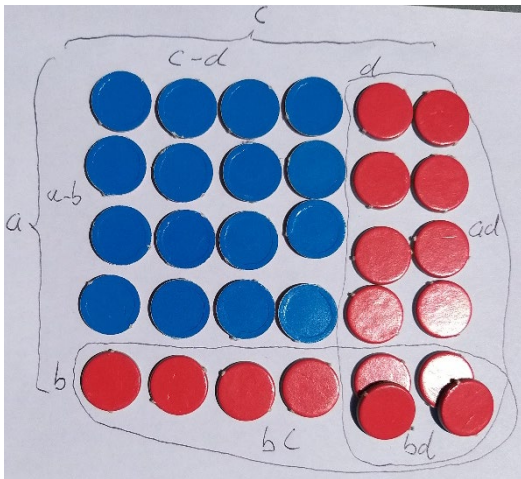
Bruchzahlen werden verwendet, wenn eine absolute Genauigkeit verwendet werden soll.

Wenn Eine Strecke gedrittelt wird, ist noch  $\frac{1}{3}$  vorhanden. In der Realität ist das nicht so genau zu tun. Wenn 1 Liter einer Flüssigkeit in der Realität gedrittelt und in Dosen abgefüllt wird, so ist nie in jedem Behälter genau gleich viel vorhanden. So sollte, abhängig von der Messgenauigkeit, auf den Behältern dann besser 0.3 Liter, oder 0.33 Liter, oder 0.333 Liter stehen.

Brüche treten also vor allem in innermathematischen Zusammenhängen auf, oder bei der Verwendung präziser Formeln. In der Volumenformel für eine Pyramide mit Grundfläche  $G$  und Höhe  $h$  steht zum Beispiel  $V = \frac{1}{3}G \cdot h$ . Hier wird mit mathematischer Präzision gedrittelt. Wenn die Grundfläche in einem realen Beispiel  $143,52 \text{ cm}^2$  beträgt, und die Höhe  $17,48 \text{ cm}$ , dann reicht es,  $0,33 \cdot 143,52 \cdot 17,48$  zu rechnen.

## 1.5 Lösungen

- 1 Zeichnung um 90 Grad drehen.
- 2 Malfeld zeichnen, nach unten  $a$ , nach rechts  $a+b$
- 3 Malkreuz zeichnen.
- 4 Quader zeichnen.
- 5 Ein Rechteck zeichnen. Nach unten die Kante aufteilen in drei Stücke: 300, 20 und 7. Analog für die Breite. Das gibt eine Aufteilung in 9 Flächen, die der Rechnung entspricht. Detti hat nur drei Flächen berücksichtigt.
- 6 Lösungsidee, mit Wendepfättchen, noch ohne ausformulierte Begründung:



- 7 a) -6    b) 14    c) 24    d) 20    e) 0
- 8 a) Einfacher ist es, zunächst die beiden Klammern auszurechnen, und dann zu multiplizieren. Es ergibt 42. Alternativ kann auch ausmultipliziert werden und es gibt auch 42.  
b) 351
- 9 a) 3    b) 216
- 10 a)  $\frac{11}{8}$     b)  $\frac{47}{36}$     c)  $\frac{11}{12}$     d)  $\frac{1}{4}$     e)  $\frac{-1}{2}$     f)  $-\frac{2}{3}$   
g) 42    h) 127    i) 85
- 11 a)  $0.\bar{1}$     b) 0.008    c)  $0.\overline{428571}$     d) 0.125
- 12 a)  $\frac{1}{8}$     b)  $\frac{733}{10}$     c)  $\frac{34}{99}$     d)  $\frac{1}{9}$     e)  $\frac{324}{999}$     f)  $\frac{1323}{999} = \frac{49}{37}$