Leitprogramm komplexe Zahlen

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil

http://home.datacomm.ch/tolinnemann

24. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

Einführung

In diesem Leitprogramm lernen Sie eine Erweiterung unseres Zahlsystems kennen.

Zunächst werden einige bekannte Erweiterungen in Erinnerung gerufen:

Natürlicherweise treten in der Primarschule vor allem die natürlichen Zahlen[1] auf. Leider lässt sich die Gleichung $x + 1 = 0$ dabei nicht lösen. Wir führen die negative Einheit -1 und deren Vielfache ein. Das führt uns zu den ganzen Zahlen[2].

Nun wollen wir noch die Gleichung $2x = 1$ lösen und landen bei den Brüchen, den rationalen Zahlen[3]. Wie ist es mit $x^2 = 2$? Schon sind wir bei den reellen Zahlen[4]

Bei all diesen Erweiterungen sind wir davon ausgegangen, dass Rechengesetze wie zum Beispiel $ab = ba$ und $(a+b)c = ac+bc$ weiter gelten müssen. Dies ist das sogenannte *Permanenzprinzip*. Dieses ist uns auch bei den Potenzen begegnet. Bei der Lösung der Gleichung $x^5 = 1$ führte es uns auf die Schreibweise $x^{1/5}$ für die fünfte Wurzel und alle Potenzrechengesetze gelten auch für diese Schreibweise.

Nun gibt es noch eine Klasse relativ einfacher Gleichungen, die nicht immer lösbar sind: die quadratischen Gleichungen. Auch hier werden wir den Zahlbereich erweitern. Dazu benötigen wir die *imaginäre Einheit*, die wir i nennen. Die imaginäre Einheit ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ (die ja bisher unlösbar war). Jetzt sagen wir einfach, die Gleichung wäre lösbar und eine Lösung ist i. Genau wie die Einführung von -1 führt uns das zu einer ganzen Klasse neuer Zahlen, den *komplexen Zahlen*, $\mathbb{C}$.

Auseinandergesetzt mit dieser Idee hat sich als erstes Leonhard Euler (1707 bis 1783) und Carl-Friedrich Gauss (1777-1855). Für diese Idee wurde er von seinen Zeitgenossen sehr kritisiert. Es kam ihnen wie ein unfairer Trick vor. Wenn es Ihnen also zunächst auch so geht, ist das normal.

Durchsetzen konnte sich dieser Trick vor allem, weil er grosse praktische Konsequenzen gezeigt hat.

Folgende Anwendungen gibt es zum Beispiel:

- Funktionen zeigen bei Definitionslücken, bei denen der Nenner Null wird, ein interessantes Verhalten. Die Funktion kann nach „unendlich“ oder Minus „unendlich“ streben. Flächeninhalte unter der Funktion, die in vielen Anwendungen wichtig sind, können sowohl endlich als auch unendlich sein. Komplexe Zahlen sagen, warum. Dazu brauchen wir komplexe Integration. So weit kommen wir hier nicht.

- Sinus-Schwingungen lassen sich als Kreisbewegungen begreifen. Hier liefern komplexe Zahlen eine Möglichkeit, Kreisbewegungen zu behandeln, ohne die die Elektrotechnik ganz anders aussähe.

- Wir kennen zwei Arten, Polynome darzustellen: ausmultipliziert oder faktorisiert. Beispiel:

$$x^4 + x^3 - 10x^2 + 2x - 24 = (x-3)(x+4)(x^2+2)$$

[1] $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
[2] $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1 - 0, 1, 2, \ldots\}$
[3] $\mathbb{Q}$=Brüche
[4] $\mathbb{R}$= alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl.

Gauss beantwortete in seiner Doktorarbeit eine lange bekannte Frage: Wann lassen sich Polynome wie weit in Faktoren zerlegen?[5] Die Aussage der Doktorarbeit von Gauss nennt sich der *Fundamentalsatz der Algebra*[6].

Es gelang Gauss, seine ganze Dissertation ohne komplexe Zahlen zu schreiben, da sie damals noch nicht anerkannt waren. Das war allerdings eine Parforceleistung, die die Sache viel schwieriger machte. Er musste seine ganze Arbeit, in der er zunächst mit komplexen Zahlen arbeitete, umschreiben.

In diesem Leitprogramm wird es darum gehen, die komplexen Zahlen zu definieren, Rechenregeln aufzustellen und Gleichungen zu lösen. Dabei wird es sehr helfen, sich die komplexen Zahlen zu veranschaulichen. Das geht in der Ebene und führt auf eine zweite Sichtweise komplexer Zahlen, der *Polarform*.

Schliesslich werden wir etwas aufwändigere Gleichungen lösen, das Problem der Schwingungen angehen und den Fundamentalsatz der Algebra formulieren und anwenden.

Bedanken möchte ich mich bei der Klasse 2bN, Kantonsschule Solothurn im Schuljahr 2004/05. Diese Klasse hat die erste Version des Leitprogramms durchgearbeitet, viele Fehler korrigiert und mir wichtige Tipps gegeben.

[5] Und mit einem Linearfaktor $(x - x_0)$ ergibt sich die Nullstelle x_0 – weshalb dieses Problem gleichbedeutend mit dem Finden von Nullstellen ist.

[6] Und wenn wir MathematikerInnen fundamental sagen, dann meinen wir fundamental. Das Zusammenspiel von Summendarstellung und Faktorisierung beherrscht die ganze Algebra: die Faktordarstellung zeigt die Nullstellen der Gleichung. Und das Suchen von Lösungen ist fundamental, oder?

Arbeitsweise

In die komplexen Zahlen sollen Sie sich mit Hilfe eines Leitprogramms einarbeiten. An vielen Stellen ist die Anschauung wichtig. Arbeiten Sie deshalb mit Ihrer SitznachbarIn eng zusammen, so dass Sie miteinander die Zusammenhänge erschliessen können. *Grössere Gruppen sollten sich aber nicht bilden.* Erfahrungsgemäss halten sich dabei alle eher gegenseitig auf. Ist also ein Problem in Zusammenarbeit mit der SitznachbarIn nicht lösbar, so wird die Lehrkraft gefragt.

Wenn mal etwas nicht gleich verstanden wird, sollten Sie, erstens noch einmal nachdenken, zweitens Ihre NachbarIn fragen und drittens sich an die Lehrkraft wenden.

Zur Lernkontrolle sind Tests in das Leitprogramm eingebaut. Wenn Sie so weit gekommen sind, wenden Sie sich bitte an die Lehrkraft, das gibt dann ein Aufgabenblatt (Kapiteltest), das Sie ohne Hilfe lösen sollen. Die Lösung zum Blatt wird abgegeben und von der Lehrkraft die Fehler angestrichen. Diese müssen korrigiert und noch einmal abgegeben werden. Fragen zum nächsten Kapitel werden erst beantwortet, wenn der letzte Kapiteltest korrekt abgegeben wurde.

Kapitel 1

Rechnen mit komplexen Zahlen

1.1 Definition und grundlegende Rechenregeln

Definition 1.1 *Die* **imaginäre Einheit** i *ist eine Zahl, deren Quadrat* -1 *ist. Es gilt also* $i^2 = -1$.

Nach dem in der Einleitung erwähnten Permanenzprinzip sollen alle Rechenarten weiter gelten. Insbesondere können wir i mit reellen Zahlen multiplizieren und erhalten Zahlen der Form. $2i$, $-5i$, $\frac{4}{5}i$ πi.

Addieren wir nun noch reelle Zahlen dazu ergeben sich Zahlen wie $3 + 2i$, $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}i$ und $\sqrt{2} + \sqrt[5]{3}i$.

Das ist bereits die ganze Erweiterung des Zahlbereichs. Wir werden zeigen, dass Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division nicht aus der Menge herausführen und dass *alle* quadratischen Gleichungen Lösungen in dieser Menge haben.

Beispiel 1.1 Wir beginnen mit einer beispielhaften Rechnung für die Addition.

$$
\begin{aligned}
(3+4i)+(7+9i) &= 3+4i+7+9i \text{ Assoziativgesetz} \\
&= 3+7+4i+9i \text{ Kommutativgesetz} \\
&= 3+7+(4+9)i \text{ Distributivgesetz} \\
&= 10+13i
\end{aligned}
$$

Bevor wir uns die Rechenoperationen mit den komplexen Zahlen genauer anschauen, brauchen wir noch einige Vokabeln. Beachte den Unterschied zwischen komplexen Zahlen und imaginären Zahlen.

Definition 1.2 *Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form $z = x + yi$, wobei x und y reelle Zahlen sind. Für die Menge der komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$ gilt also:*

$$\mathbb{C} = \{x + yi | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Dabei ist x der **Realteil** *von z und y der* **Imaginärteil**. *Eine Zahl, deren Realteil 0 ist, heisst* **rein imaginär**

Beispiel 1.2 Die Zahl $3 + 4i$ hat den Realteil 3 und 4 ist der Imaginärteil[1]. Wir schreiben $\mathrm{Re}(3 + 4i) = 3$ und $\mathrm{Im}(3 + 4i) = 4$.

Die rein imaginäre Zahl $7i$ hat den Imaginärteil 7 und den Realteil 0.

Die reelle Zahl 42 hat den Realteil 42 und den Imaginärteil 0. *Die reellen Zahlen sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen.*

Bemerkung: Hier lässt sich auch schon die Veranschaulichung in der Ebene andeuten. Wir interpretieren $x + yi$ einfach als Punkt $(x|y)$.

1.2 Addition, Subtraktion und Multiplikation

Wir kommen jetzt zu den versprochenen Grundrechenarten.

Satz 1.1 *Es gilt für $z = a + bi$ und $w = x + yi \in \mathbb{C}$:*

$$z + w = (a + x) + (b + y)i \in \mathbb{C} \text{ und } z - w = (a - x) + (b - y)i \in \mathbb{C} \text{ und}$$

$$z \cdot w = ax - by + (ay + bx)i \in \mathbb{C}$$

Bei Addition und Subtraktion können also einfach Real- und Imaginärteil unabhängig voneinander behandelt werden. Die Multiplikation ist weniger anschaulich. Eine anschauliche Erklärung ergibt sich mit der Polarform erst im nächsten Kapitel.

Die Division kommt später in diesem Abschnitt. Komplexe Zahlen im Nenner bedürfen einer gesonderten Behandlung, dazu wird das konjugiert Komplexe eingeführt.

Beweis: Addition und genauso die Subtraktion ergeben sich aus dem Beispiel 1.1 und sind auch unmittelbar einsehbar. Es bleibt die Multiplikation.

$$\begin{aligned}
(a + bi) \cdot (x + yi) &= a \cdot x + a \cdot yi + bi \cdot x + bi \cdot yi \\
&= ax + (ay)i + bxi + by \cdot i^2 \\
&= ax + (ay + bx)i + by(-1) \\
&= ax + (ay + bx)i - by \\
&= ax - by + (ay + bx)i
\end{aligned}$$

[1] Vorsicht: der Imaginärteil ist nicht $4i$

Beispiel 1.3 $(5+3i)(6-4i) = 5\cdot 6 - 3(-4) + (5(-4) + 3\cdot 6)i = 42 - 2i$

Beispiel 1.4 $(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = (-1)i(-1)i = (-1)^2 i^2 = 1\cdot(-1) = -1$

Aufgabe 1.1 Berechnen Sie

a) $(8+2i)+(7+3i)$ b) $8i\cdot 5i$ c) $(11-15i)(-3+8i)$ d) $(-7-12i)\cdot 5i$

Aufgabe 1.2 Hier ist $z_1 = 7-5i$, $z_2 = 2+i$, $z_3 = -5+2i$, $z_4 = -10-3i$, $z_5 = 8$, $z_6 = 8i$. Berechnen Sie[2]

a) $z_1 - z_2 - z_3$ b) $z_1 z_3 z_4$ c) $\mathrm{Re}(z_1 + 4z_2)$ d) $\mathrm{Im}(z_2^2 z_4)$ e) $iz_4 - z_3 z_6$

Aufgabe 1.3 Berechnen Sie a) $(2u+3vi)(5u+7i)$ b) $(5-3i)^3$

Aufgabe 1.4 Berechnen Sie i^3, i^4, i^5, i^8, i^{41}, i^{42} und stellen Sie eine allgemeine Regel für i^n auf.

1.3 Konjugiert komplexe Zahlen

Wenn wir $x+yi$ als Punkt $(x|y)$ in der Ebene auffassen, so ist $\sqrt{x^2+y^2}$ der Abstand vom Koordinatenursprung (Pythagoras). Die reelle Zahl x^2+y^2 steht also in wichtiger Beziehung zur komplexen Zahl $x+iy$. Es gibt nun einen Trick, „auf komplexe Art“ zu dieser Zahl zu kommen. Wir multiplizieren einfach mit $x-yi$:

$$(x+yi)(x-yi) = x^2 - y(-y) - xyi + xyi = x^2 + y^2$$

Dieser Trick ist einen neuen Begriff wert:

Definition 1.3 *Die zu* $z = x+yi$ **komplex konjugierte Zahl** *ist* $\overline{z} = x - yi$.

Die erste der folgenden Gleichungen haben wir oben gezeigt, der Rest ist leicht nachprüfbar:

Satz 1.2 *Es gilt*

1. $z\overline{z} = x^2 + y^2$.
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$
4. $z = \overline{z}$ *ist gleichbedeutend mit* $\mathrm{Im}(z)=0$ *bzw* $z \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1.5 Rechnen Sie zunächst für $z = 2+3i$ und $w = 5+4i$ nach, dass die Formeln im folgenden Satz stimmen und beweisen Sie die ersten beiden dann allgemein.

[2] Ja, derGraphikrechner kann das auch. Zur Übung und damit das Verständnis steigt, muss aber ohne Taschenrechner gerechnet werden.

Satz 1.3 *Es gilt* $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z+w}$ *und* $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$. *Weiterhin gilt* $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

Aufgabe 1.6 Es ist $z = 2 + 3i$ und $w = -1 + 4i$. Berechnen Sie$(\overline{z})^2\,\overline{w}$.

1.4 Division

Nun müssen wir noch die Division behandeln, oder gleichbedeutend, Brüche mit komplexen Zahlen als Nenner. Die entscheidende Idee haben wir schon zur Hand: wird der Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert, so bleibt eine reelle Zahl im Nenner.

Beispiel 1.5 $\dfrac{1+3i}{3+4i} = \dfrac{(1+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{15+5i}{25} = \dfrac{15}{25} + \dfrac{5}{25}i = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$

Allgemein wird daraus:

Satz 1.4 *Für* $z = x + yi$ *und* $w = a + bi$ *gilt* $\dfrac{z}{w} = \dfrac{(xa + yb) + (ya - xb)i}{a^2 + b^2}$

Wichtiger als diese Formel ist es aber, sich die Idee mit dem Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners zu merken.

Aufgabe 1.7 Berechnen Sie

a) $\dfrac{5+3i}{2+4i}$ b) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ c) $\dfrac{13-5i}{1-i}$

Aufgabe 1.8 Zur Zahl z sollen $-z$, $\overline{z}$ und $z^{-1} = \frac{1}{z}$ berechnet werden.

a) $12 - 5i$ b) $3 + i$ c) $\frac{5}{3}i$ d) $-\frac{3}{2}$

Aufgabe 1.9 Berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}i}{\frac{1}{2} + \frac{7}{3}i}$

Aufgabe 1.10 Berechnen Sie i^{-1} und $\dfrac{i^{12} \cdot i^{10} \cdot i^{20}}{i^{44}}$

1.5 Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten

Dies war die ursprüngliche Motivation, die komplexen Zahlen einzuführen. Bevor wir tiefer in das Thema einsteigen, wird das Problem gelöst.

Erinnerung:

Satz 1.5 *Die Lösungen der quadratischen Gleichung* $x^2 + px + q = 0$ *sind* $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diese Formel[3] gilt weiterhin. Keine reellen Lösungen gibt es, wenn die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ negativ wird.

Wir zeigen nun, dass sich solche negativen Wurzeln mit komplexen Zahlen interpretieren lassen.

Beispiel 1.6 Wir beginnen mit der Gleichung $z^2 = -10$. Wir rechnen $-10 = 10 \cdot (-1) = 10i^2$. Unsere Gleichung wird also zu $z^2 = 10i^2$, deren Lösungen sind $z_1 = \sqrt{10}i$ und $z_2 = -\sqrt{10}i$.

Wir erhalten:

Satz 1.6 *Zu jeder negativen Zahl a gibt es zwei komplexe Zahlen, deren Quadrat gleich a ist:*

$$z_1 = \sqrt{|a|}i \text{ und } z_2 = -\sqrt{|a|}i$$

Insbesondere gilt auch $(-i)^2 = -1$, auch die Gleichung $x^2 = -1$ hat also zwei Lösungen, nämlich $\pm i$.

Beispiel 1.7 Zu lösen ist die Gleichung $z^2 + 2z + 4 = 0$.

Die Lösungen sind $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{|1-4|}\,i = -1 \pm \sqrt{3}\,i$

Satz 1.7 *Die Lösungen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten und negativer Diskriminante sind konjugiert zueinander*

Aufgabe 1.11 Lösen Sie die quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$.

a) $z^2 - 8z + 65 = 0$ b) $4z^2 + 8z + 5 = 0$ c) $25z^2 - 60z + 61 = 0$ d) $z^2 - z + 1 = 0$

Jetzt ist also unser Ausgangsproblem gelöst. Aber das ist noch lange nicht alles. Typisch für die Mathematik ist ja, einen Themenkomplex weiter zu untersuchen. Wir werden am Ende des Leitprogrammes sehen, dass sich dann damit auch viele Fragestellungen von ausserhalb der komplexen Zahlen bearbeiten lassen.

Wesentlich dazu beitragen wird die Polarform, die wir aus einer geometrischen Interpretation der komplexen Zahlen erhalten. Höchste Zeit, damit zu beginnen. Vorher noch der erste Kapiteltest.

Melden Sie sich bitte jetzt zum Kapiteltest an!

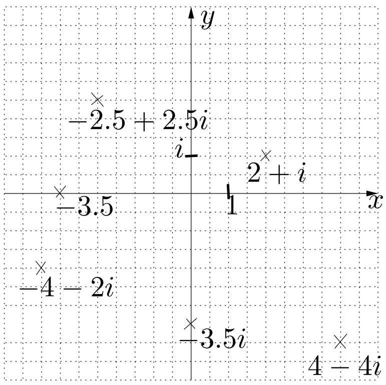
[3] Es gibt noch eine andere Formel mit dem Koeffizienten a vor dem x. Wenn wir später komplexe Zahlen als Koeffizienten zulassen, müssen wir am Ende noch durch a teilen. Deshalb beschränken wir uns auf quadratische Gleichungen mit $a = 1$.

Kapitel 2

Die Gausssche Zahlenebene

2.1 Die Gausssche Zahlenebene

Eine komplexe Zahl hat einen Real- und Imaginärteil. Also zwei Komponenten. Es bietet sich an, diese Komponenten in einem Koordinatensystem darzustellen. Der Realteil ist die x-Koordinate, der Imaginärteil die y-Koordinate.



Definition 2.1 *Die komplexe Zahl $z = x + yi$ wird durch den Punkt $P(x|y)$ dargestellt. Stellen wir komplexe Zahlen in der Ebene dar, so nennen wir sie die* **Gausssche Zahlenebene**. *Die x-Achse heisst* **reelle Achse**, *die y-Achse* **komplexe Achse**.

Rein imaginäre Zahlen liegen also auf der y-Achse, reelle Zahlen auf der x-Achse. Je nach Vorzeichen des Real- und Imaginärteils entscheidet sich also, in welchem Quadranten die Zahl liegt.

Aufgabe 2.1 Stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Gausschsen Zahlenebene dar.

2, $3i$, -2, $4 + 6i$ und $-4 + 6i$.

Aufgabe 2.2 Es sei $z = 2 + 4i$.

a) Stelle die folgenden Zahlen in der Ebene dar: z, $-z$, $\overline{z}$, $-\overline{z}$, $z + \overline{z}$ und $z - \overline{z}$.

b) Beschreiben Sie die gegenseitige Lage der Punkte z und $\overline{z}$.

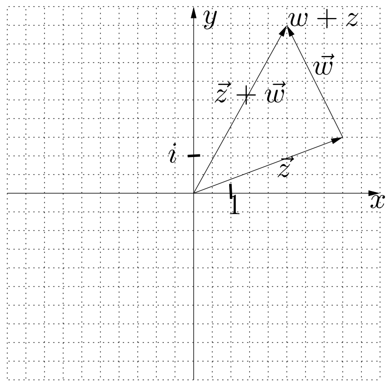
c) Das gleiche für z und $-z$, sowie für z und $-\overline{z}$.

d) Was lässt sich über $z + \overline{z}$ und $z - \overline{z}$ aussagen?

Aufgabe 2.3 Geben Sie in der Gaussschen Zahlenebene die Menge der Punkte $z = x + yi$ an, für die gilt

a) $z = \overline{z}$ b) Re(z)=1 c) Im(z) < 0 d) $x^2 + y^2 < 4$

2.2 Addition



Die Addition zweier komplexer Zahlen, so haben wir gelernt, erfolgt für Real- und Imaginärteil getrennt. Dies entspricht der Vektoraddition: Wir identifizieren $z = x+yi$ mit dem Ortsvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und erhalten:

Satz 2.1 *Die Addition der Zahlen $z = x + yi$ und $w = a + bi$ entspricht der Addition der Ortsvektoren $\vec{z} + \vec{w}$. Enstprechendes gilt für die Subtraktion.*

Bemerkung: Der zur Zahl $-z$ gehörende Vektor hat die gleiche Länge und entgegengesetzte Richtung wie z.

Aufgabe 2.4 Gegeben sind die komplexen Zahlen z und w. Welche Bedeutung hat der Verbindungsvektor von w nach z in der Gaussschen Zahlenebene?

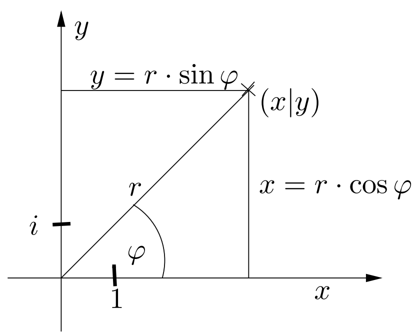
Aufgabe 2.5 Stellen Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 3.5 + 0.5i$, $z_2 = i$ und $z_3 = -1 - 2i$ als Punkte dar. Zeichnen Sie dann Vektoren, welche die folgenden Differenzen darstellen.

a) $z_2 - z_1$ b) $z_1 - z_3$ c) $z_2 - z_3$

Aufgabe 2.6 Gegeben sind die fünf folgenden komplexen Zahlen $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = -6$, $z_3 = -3 + 5i$ und $z_4 = 3i$. Bestimmen Sie graphisch die Zahl $w = z_1 + z_2 - z_3 + z_4$ und überprüfen Sie rechnerisch.

Um nun zur Multiplikation und Division zu kommen, benötigen wir zunächst die lange versprochene Polarform.

2.3 Die Polarform einer komplexen Zahl



Erinnerung: Sinus und Cosinus lassen sich am Kreis definieren. Dabei ist die x-Koordinate das r-fache des Cosinus und die y-Koordinate ergibt sich mit dem Sinus. Dabei ist r der Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung.
Im folgenden werden wir für Winkel das Bogenmass verwenden.
Dies lässt sich ausnutzen für komplexe Zahlen:

Definition 2.2 *Die* **Polarform** *einer komplexen Zahl $z = x + yi$ lautet $z = (r\angle\varphi)$, oder auch r cis ϕ. (φ wird als phi ausgesprochen.)Dabei ist r der Abstand vom Koordinatenursprung und φ der Winkel zwischen der x-Achse und dem Ortsvektor zu z. Der Winkel φ liegt also zwischen 0 und 2π.*
Die Form $z = x + yi$ nennen wir **kartesische Form**.

Auf die Bezeichnung „cis“ kommen wir gleich zurück.

Satz 2.2 *Es gelten die folgenden Umrechnungsformeln für $z = x + yi = (r\angle\varphi)$*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \textit{für } z \textit{ in der rechten Halbebene} \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \textit{für } z \textit{ in der linken Halbebene} \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Formeln stammen aus der Trigonometrie. Unangenehm ist insbesondere die Berechnung von φ aus x und y. Sie liegt daran, dass die Umkehrfunktion des Tangens und der Sinusfunktion nur zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ definiert ist. Wir brauchen aber Winkel zwischen 0 und 2π. Dies war bereits in der Trigonometrie eine Fehlerquelle. Insbesondere musste beim Sinussatz oft noch eine zweite Lösung in Betracht gezogen werden.

Aufgabe 2.7 Berechne die Polarformen von $2 - 2\sqrt{3}i$ und $-2 + 2\sqrt{3}i$

Definition 2.3 *Der Winkel φ heisst* **Argument** *der komplexen Zahl. Der Abstand $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ heisst* **Betrag** *der komplexen Zahl.*

Bei der Definition der komplex konjugierten Zahl haben wir also den folgenden Satz gezeigt:

Satz 2.3 $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

Einige weitere Überlegungen zum Konjugieren sollen Sie selber anstellen:

Aufgabe 2.8 Zeichne eine beliebige Zahl und ihr konjugiertes in ein Koordinatensystem.

a) Was bedeutet das Konjugieren geometrisch?

b) Welche Folgen hat das für das Argument und den Betrag der Zahl?

c) Vervollständige den folgenden Satz.

Satz 2.4 *Für $z = (r\angle\varphi)$ gilt $\overline{z} = (\ldots\angle\ldots)$. Das Konjugieren bedeutet also Spiegelung ....
Der Betrag ....*

Der Taschenrechner

Es gibt immer wieder Leute, denen das Umrechnen zwischen Polarform und kartesischer Form mühsam erscheint.

So lässt sich mit dem Taschenrechner von Polar- auf kartesische Form umrechnen:

In MODE->complex format auf „rectangular“ stellen. Das setzt den Rechner auf kartesische (rechteckige) Form. Dann über die Tastatur zum Beispiel $(4\angle\pi/3)$ eingeben[1]. Enter. Fertig.

Die Umrechnung in die andere Form erfolgt analog: Rechner auf polar stellen. Dann die kartesische Form eingeben. Enter. Fertig (manchmal, stattdessen gibt der Rechner manchmal etwas mit einem e aus. Zum Beispiel $3e^{\pi/4}$. Das werdet ihr erst im nächsten Kapitel lernen. Die Zahl vor dem e entspricht dem Betrag, der Exponent dem Winkel.

Geben Sie jetzt je 3 selbstgewählte Zahlen in Polar und kartesischer Form ein und wandeln sie diese in die andere Form um. Mit ein wenig Übung erscheint das gar nicht mehr so umständlich.

Die Umrechnung in die andere Richtung bedarf noch weitere Notation für die wir allerdings die Multiplikation benötigen.

Der Richtungsfaktor

Wir haben oben gesehen, dass gilt $z = (r\angle\varphi) = r\cos\varphi + r\sin\varphi i$. Ausklammern von r und Umkehren der Reihenfolge im zweiten Summanden gibt. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dabei gibt r die Länge an und $\cos\varphi + i\sin\varphi$ die Richtung. Folglich heisst $\cos\varphi + i\sin\varphi$ **Richtungsfaktor** der komplexen Zahl. Wir schreiben für den Richtungsfaktor auch cisφ. Dabei kommt cis von den Anfangsbuchstaben von cos, i und sin. Es gilt also cis$\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Wir werden künftig beide Schreibweisen, $(r\angle\varphi)$ und r cisφ, benutzen.

2.4 Multiplikation, Division und Potenzen

Multiplikation

Wird ja auch Zeit.

Die einfache Veranschaulichung der Multiplikation bedarf einer aufwändigen Rechnung. Zur Motivation schon mal das Resultat:

Satz 2.5 *Bei der Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.*

Beweis: Zum Beweis benötigen wir im vorletzten Schritt Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

[1] $\angle$ befindet sich über der Taste EE.

Wir schreiben $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)) \cdot (r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)) \\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \text{ Additionstheoreme verwendet} \\
&= (r_1 r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2)
\end{aligned}$$

Beispiel 2.1 $(4\angle\pi/3) \cdot (3\angle\pi/2) = (12\angle 5\pi/6)$

Wir formulieren den obigen Satz um:

Das Produkt der Zahlen $z_1 = (r_1\angle\varphi_1)$ und $z_2 = (r_2\angle\varphi_2)$ ist

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2).$$

Bemerkung: Wir müssen aufpassen, wenn sich Winkel über 2π ergeben:

$$(4\angle 4\pi/3) \cdot (3\angle 3\pi/2) = (12\angle 17\pi/6) = (12\angle 5\pi/6).$$

Aufgabe 2.9 Berechnen Sie das folgende Produkt

$$w = \operatorname{cis}\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{cis}\left(2 \cdot \frac{\pi}{5}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(3 \cdot \frac{\pi}{5}\right) \dots \cdot \operatorname{cis}\left(19 \cdot \frac{\pi}{5}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(20 \cdot \frac{\pi}{5}\right)$$

Division

Aufgabe 2.10 Zuerst kommen Kehrwerte an die Reihe.

a) Gegeben ist $z = (4\angle\pi/6)$. Finde die Zahl $w = (s\angle\psi)$, so dass gilt $zw = 1 = 1\angle 0)$

b) Gegeben ist $z = (r\angle\varphi)$. Finde die Zahl $w = (s\angle\psi)$, so dass gilt $zw = 1 = 1\angle 0)$.

c) Verstehe aus den ersten beiden Aufgabenteilen heraus den folgenden Satz.

Satz 2.6 *Für $z = (r\angle\varphi)$ ist $z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\angle - \varphi\right)$.*

Das Inverse $1/z$ einer komplexen Zahl ergibt sich also, indem das Inverse des Betrags gebildet wird und der Winkel negativ genommen wird. Die Richtung ergibt sich also durch Spiegelung an der x-Achse.

Über die Überlegung $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$ ergibt sich jetzt sofort der folgende Satz.

Satz 2.7 *Bei der Division werden die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert.*
Für $z_1 = (r_1\angle\varphi_1)$ und $z_2 = (r_2\angle\varphi_2)$ ist

$$z_1 : z_2 = (r_1 : r_2 \angle \varphi_1 - \varphi_2).$$

Aufgabe 2.11 Berechnen Sie die folgenden Quotienten. Benutzen Sie für die Rechnung die Polarform der auftretenden Zahlen und geben Sie die Resultate in Normalform an.

a) $w = \dfrac{\text{cis}\frac{\pi}{4}}{\text{cis}\frac{7\pi}{12}}$ b) $w = \dfrac{4+4i}{2\text{cis}0.4}$

Aufgabe 2.12 Gegeben ist die Zahl $z = (3\angle\pi/12)$. Berechne für die folgenden Zahlen w jeweils wz und $z : w$ und beschreibe die gegenseitige Lage.

a) $w = 2$ b) $w = \frac{1}{2}$ c) $w = \text{cis}\pi/4$
d) $w = 2i$ e) $w = 1.5\text{cis}\pi/6$

Aufgabe 2.13 Geben Sie das Ergebnis in Polarform an.

a) $\text{cis}\,\pi/5 \cdot \text{cis}\,\pi/10$ b) $\text{cis}\,11\pi/6 \cdot \text{cis}\,3\pi/8 : \text{cis}\,\pi/4$

c) $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}$ d) $2\text{cis}\,\pi \cdot 21\text{cis}\,\pi$

Aufgabe 2.14 Geben Sie zur Zahl z die konjugierte Zahl $\overline{z}$ und die Gegenzahl $-z$ in Polarform an.

a) $4\text{cis}\,\pi/3$ b) $\dfrac{1}{3}\text{cis}\,\pi/4$

Potenzieren

Es ist nun eigentlich bereits klar, wie das Potenzieren zu erfolgen hat.

Beispiel 2.2 $4\text{cis}\,\frac{\pi}{6} \cdot 4\text{cis}\,\frac{\pi}{6} = 4 \cdot 4\text{cis}\,\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 4^2\text{cis}\,\left(2\frac{\pi}{6}\right) = 16\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$

Satz 2.8 *Es gilt für $z = r\textit{cis}\,\varphi$:*

$$z^n = r^n\textit{cis}\,(n\varphi)$$

Der Betrag wird also mit n potenziert, der Winkel mit n multipliziert.

Beispiel 2.3 Zu berechnen ist $(1+2i)^{10}$. Vernünftigerweise geschieht dies mit dem Taschenrechner. Wie üblich ist es aber sinnvoll zu sehen, wie das auch ohne grossen Rechenaufwand mit der Polarform geschehen kann. Das gibt ein Gefühl für die Sache, das auch bei weiteren Betrachtungen hilft.

Zunächst wandeln wir $z = 1 + 2i$ in Polarform um. $z = \sqrt{5}\text{cis}\,1.10715$. (gerundet)

Damit ist $w = z^{10} = \sqrt{5}^{10}\text{cis}\,(10 \cdot 1.107) = 5^5\text{cis}\,11.0715$.

Der Winkel ist grösser als 2π. Wir ziehen das ab und erhalten

$w = 3125\text{cis}\,4.7883$. Umwandeln in kartesische Form gibt

$w = 236.994 - 3116.004i$. Das enthält noch einen Rundungsfehler. Das wahre Resultat ist $w = 237 - 3116i$.

Bei den nächsten beiden Aufgaben ist es sinnvoll, im Gradmass zu rechnen. Insbesondere weil in der übernächsten Aufgabe Winkel eingetragen werden müssen. Und das Geodreieck hat meist Gradeinteilung.

Aufgabe 2.15 Berechnen Sie über den Umweg über die Polarform $w = \dfrac{(1-\sqrt{3}i)^9}{(-1+i)^{15}}$.

Aufgabe 2.16 Es sei $z = \frac{2}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{5}i$. Wandeln Sie diesen Punkt in Polarform um, berechnen Sie z^2, z^3, $\ldots z^7$ und tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem ein.

Aufgabe 2.17 Berechnen Sie in Polarform.

a) $\left(\text{cis}\,\frac{\pi}{3}\right)^3 : \left(\text{cis}\,\frac{\pi}{8}\right)^5$ b) $\left(\text{cis}\,\frac{\pi}{5}\right)^{-3}$ c) $\left(\text{cis}\,-\frac{2\pi}{3}\right)^{-5}$

$$\boxed{\textit{Melden Sie sich bitte jetzt zum Kapiteltest an!}}$$

Kapitel 3

Anwendung: Trigonometrie, Schwingungen

Die Entwicklung der Theorie der komplexen Zahlen rechtfertigt sich vor allem über die zahlreichen Anwendungen bei Fragestellungen, die bereits im reellen Bereich auftreten. Gerade in der Trigonometrie zeigt sich, dass Herangehensweisen mit Methoden der komplexen Zahlen die Lösung sehr vereinfachen oder sogar erst zugänglich macht.

3.1 Additionstheoreme

Bei der Herleitung der Formel für das Potenzieren haben wir Additionstheoreme für sin und cos $(\varphi + \psi)$ benutzt. Die Formel für das Potenzieren liefert uns jetzt weitere Sätze, deren Herleitung im Reellen sehr mühsam wäre. Hier sind die komplexen Zahlen erstmals nützlich für reelle Probleme. Gerade bei trigonometrischen Problemen geschieht dies oft.

Es gilt $(\text{cis}\,\varphi)^n = \text{cis}\,n\varphi$. Wir erinnern uns an die Definition von cis und schreiben:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Multiplizieren wir dies für $n = 2$ mit der binomischen Formel aus[1]

$$\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi. \quad \text{(benutzt wurde } i^2 = -1)$$

Diese Gleichung stimmt sowohl für den Realteil als auch für den Imaginärteil. Das gibt uns zwei Gleichungen:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \quad \text{und für den Imaginärteil} \quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$$

Damit haben wir die Doppelwinkelformeln schnell hergeleitet. Auch für höhere Potenzen lässt sich dies leicht durchführen.

Aufgabe 3.1 Leiten Sie wie oben Formeln für $\cos 3\varphi$ und $\sin 3\varphi$ her. An einer Stelle muss eine dritte Potenz ausmultipliziert werden. Damit es nicht zu viel Schreibaufwand gibt, schreiben Sie $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$.

[1] Erinnerung an eine Schreibweise: $(\cos\varphi)^2 = \cos^2\varphi$

3.2 Die komplexe Exponentialfunktion

Zunächst führen wir eine neue Art ein, die Polarform zu schreiben. Statt Winkel mit φ zu bezeichnen, wählen wir dabei t oder s.

Wir wissen, dass folgendes gilt:

$$\text{cis}\, t \cdot \text{cis}\, s = \text{cis}\,(t+s) \quad \text{und} \quad (\text{cis}\, t)^n = \text{cis}\,(nt).$$

Vergleichen wir dies mit den folgenden Potenzrechengesetzen

$$a^t \cdot a^s \quad \text{und} \quad \left(a^t\right)^n = a^{nt}$$

so stellen wir fest, dass eigentlich die gleichen Rechenregeln gelten. Es drängt sich auf, $\text{cis}\, t = \cos t + i \sin t$ als Potenz zu schreiben. Die Rechengesetze für cis sind dann die Potenzrechengesetze.

Und jetzt kommt die Idee: wir haben a^z noch nicht für komplexe Exponenten z definiert. Das tun wir jetzt, beschränken uns aber auf die natürliche Exponentialfunktion.

$$e^{it} = \text{cis}\, t \quad \text{(Vorsicht: Rechner auf Radiant einstellen)}$$

Damit gilt

$$e^{x+iy} = e^x \text{cis}\, y \quad \text{und}$$

$$e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}.$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist jetzt wirklich einfach geworden. Wir müssen nur noch Exponenten addieren. Oft wird übrigens, leider, der Betrag nicht in der Form e^x dargestellt sondern als r. So wird die komplexe Zahl $3+3i$ geschrieben als $\sqrt{18}e^{i\pi/4}$.

Jetzt können wir endlich auch mit dem Taschenrechner die Umwandlung von kartesischer Form in Polarform verstehen. Geben wir zum Beispiel $1+i$ ein, während MODE->complex format auf polar eingestellt ist, so erhalten wir als Antwort $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, was gleichbedeutend ist mit $(\sqrt{2}\text{cis}\, \frac{\pi}{4})$.

Das konjugiert Komplexe von re^{it} ist also re^{-it}.

Übrigens ist der $\cos t$ jetzt einfach der Realteil von e^{it}. Es ergibt sich damit

$$\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t.$$

Aufgabe 3.2 Beweisen Sie die obige Formel. Das ist einfach, wenn Sie $e^{it} = \text{cis}\, t = \cos t + i \sin t$ benutzen. Stellen Sie dann eine analoge Formel für den Sinus auf.

Schwingungen

Im Folgenden wenden wir die Theorie der komplexen Zahlen auf Schwingungen an.

Schwingungen sind von der Form

$$s_1(t) = A\cos(\omega t + p_0)$$

Dabei ist A die Amplitude, p die Phase, die die Auslenkung für $t = 0$ gibt, ω die Frequenz und t die Zeit.

Die komplexe Exponentialfunktion lässt sich schön anwenden, um zwei Schwingungen gleicher Frequenz zu addieren.

Eine Methode, dies ohne komplexe Zahlen zu bewerkstelligen, kennt der Autor nicht[2]. Viele Taschenrechner können es nicht in einem Schritt, wir müssen so vorgehen wie im Folgenden beschrieben.

Die Addition zweier Schwingungen ist zunächst nicht ganz einfach, sie hängt sehr von der Phase ab. Betrachten wir zunächst zwei Schwingung mit gleicher Amplitude:
$s_1(t) = A_1\cos(t + p_1)$ und$s_2(t) = A_1\cos(t + p_2)$. Ist $t_1 - t_2 = \pi$ bei gleicher Amplitude, so ist $s_1 + s_2 = 0$ stets. Die Schwingungen löschen sich aus. Es ist auch eine Addition der Amplituden möglich. Interessanterweise ergibt sich auch bei anderen Phasenverschiebungen wieder eine Schwingung – mit anderer Phase:

Aufgabe 3.3 Betrachten Sie (mit dem Graphikrechner oder dem PC) für verschiedene Werte der Parameter A_1, A_2, p_1 und p_2 die beiden Schwingungen $s_1(t) = A_1\cos(t + p_1)$ und$s_2(t) = A_1\cos(t + p_2)$ und ausserdem die Summe $s_1(t) + s_2(t)$. Was fällt auf?

Jetzt werfen wir alle unsere Kenntnisse über komplexe Zahlen ins Rennen und schreiben zunächst einmal eine Schwingung mit der komplexen Exponentialfunktion.

$s(t) = A\cos(\omega t + p) = \text{ Re}\left(A(\cos(\omega t + p) + i\sin(\omega t + p))\right) = \text{ Re }\left(Ae^{i(\omega t+p)}\right)$

Wir erhalten also aus der Schwingung eine komplexe Kreisbewegung $Ae^{i(\omega t+p)}$. Den Startpunkt c der Kreisbewegung finden wir, indem wir $t = 0$ setzen. Wir erhalten $c = Ae^{i(\omega 0+p)} = Ae^{ip}$. Wir nennen c den „Zeiger der Schwingung“.

Mit den Rechengesetzen lässt sich c sogar vom Rest der Funktion trennen. $Ae^{i(\omega t+p)} = Ae^{i\omega t}e^{ip} = ce^{ip}$.

Nun wird gezeigt, dass die Addition zweier Schwingungen erfolgt, indem die Zeiger der zugehörigen komplexen Kreisbewegungen addiert werden. Um übersichtlicher zu bleiben, beschränken wir uns auf $\omega = 1$.

$$\begin{aligned}
s_1(t) + s_2(t) &= A_1\cos(t + p_1) + A_2\cos(t + p_2) \\
&= \text{Re }\left(A_1e^{i(t+p_1)}\right) + \text{ Re }\left(A_2e^{i(t+p_2)}\right) \\
&= \text{Re }\left(A_1e^{i(t+p_1)}) + A_2e^{i(t+p_2)}\right) \\
&= \text{Re }\left(A_1e^{it}\cdot e^{ip_1} + A_2e^{it}\cdot e^{ip_2}\right) \\
&= \text{Re }\left(c_1e^{it} + c_2e^{it}\right) \\
&= \text{Re }\left((c_1 + c_2)e^{it}\right)
\end{aligned}$$

[2]Schwingungen sind die Grundlage der Elektrotechnik (Wechselstrom). Ohne $\mathbb{C}$ keine Elektronik.

Nun können die beiden Zeiger, die einfach nur komplexe Zahlen sind, addiert werden. Ist der Taschenrechner auf Polarform eingestellt, ergibt sich das Ergebnis $c_3 = c_1 + c_2$ wieder in Polarform $A_3 e^{ip_3}$. Beachte, dass sich A_3 und p_3 nicht ohne weiteres aus den Amplituden und Phasen der ursprünglichen Schwingung ergeben. Es braucht den Umweg über die Addition komplexer Zahlen.

Insgesamt

$$\begin{aligned} s_1(t) + s_2(t) &= \text{Re}\,\left(e^{it}\left(A_3 e^{ip_3}\right)\right) \\ &= \text{Re}\,\left(A_3 e^{i(t+p_3)}\right) \\ &= A_3 \cos(t + p_3) \end{aligned}$$

also eine Schwingung mit Amplitude A_3 und Phase p_3.

Beispiel 3.1 $4\cos(t + \pi/3) + 3\cos(t + \pi/4) = \ldots$

Wir müssen nur die Zeiger addieren

$4e^{\frac{\pi}{3}i} + 3e^{\frac{\pi}{4}i} = 6.94e^{0.935i}$.

Die neue Summe der Schwingungen lautet also $6.94\cos(t + 0.935)$

Aufgabe 3.4 Zeichnen Sie mit dem Graphikrechner $y1(x) = 4\cos(x + \pi/3) + 3\cos(x + \pi/4)$ und $y2(x) = 6.94\cos(x + 0.935)$ (vorsicht: x als Variable) und kontrollieren Sie so das letzte Resultat.

Aufgabe 3.5 Stellen Siedie Addition der beiden Schwingungen wieder als Schwingung dar.

a) $s_1(t) = 42\cos(t + \pi)$, $s_2(t) = 42\cos(t + 2\pi)$

b) $s_3(t) = 2\cos(t + 0.84)$, $s_4(t) = 4\cos(t + 0.43)$

c) $s_5(t) = 5.1\sin(t + 0.34)$, $s_6(t) = 6\cos(t + 0.43)$ (Es gibt eine Umrechnungsformel für Sinus und Cosinus.)

Anhang A

Polynome, Gleichungen und Nullstellen

Dieses Kapitel enthält den versprochenen Fundamentalsatz der Algebra.

Nach Ansicht des Autors haben Sie sich jetzt lange genug in Form eines Leitprogramms mit komplexen Zahlen beschäftigt. Es ist Zeit für etwas Normalunterricht. Also sind hier nur die wichtigsten Definitionen und Sätze zusammengefasst. Im Anschluss finden sich einige Aufgaben, meist ohne Lösungen.

A.1 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

Beispiel A.1 Wir gehen aus von der Gleichung $(3+i)z+(3+i) = 7+2i$. Abziehen von $(3+i)$ gibt $(3+i)z = 4+i$. Nun wird durch $(3+i)$ geteilt und die üblichen Divisionsrechengesetze werden angewendet:
$z = \dfrac{4+i}{3+i} = \dfrac{(4+i)(3-i)}{10} = \dfrac{12+1-4i+3i}{10} = 1.3 - 0.1i$

Das war ja noch recht einfach. Jetzt kommt ein Gleichungssystem mit komplexen Koeffizienten[1].

Beispiel A.2 $\begin{array}{rcl} -5iz + (1+2i)w & = & -41-7i \\ (1+i)z - 3w & = & 8-26i \end{array}$

Das ist schon eher eine Herausforderung. Wir erinnern uns an das Eliminationsverfahren. Zuerst könnte z eliminiert werden. Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung mit (1+i) und die zweite mit $-5i$. Das gibt

$$\begin{array}{rcl} (5-5i)z + (-1+3i)w & = & -34-48i \\ (5-5i)z + 15iw & = & -130-40i \end{array}$$

Ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab, so erhalten wir

[1] Zur Erinnerung: Die Koeffizienten sind die Zahlen vor den Variablen. Oben war der Koeffizient von z die komplexe Zahl $3+i$.

$$\begin{aligned}(-1-12i)w &= 96-8i\\ w &= \frac{96-8i}{-1-12i}=8i\end{aligned}$$

Nun kennen wir w und setzen dieses in die zweite Gleichung ein,in der w ja einfacher vorkommt.

$$\begin{aligned}(1+i)z-3(8i) &= 8-26i\\ (1+i)z &= 8-2i\\ z &= 3-5i\end{aligned}$$

Der Rechenweg bei komplexen linearen Gleichungssystemen ist der gleiche wie bei der reellen Version. Durch die vielen komplexen Rechnungen ist der Rechenweg deutlich grösser. Bei diesen Aufgaben muss überlegt werden, wie weit der Taschenrechner eingesetzt wird.

Aufgabe A.1 Lösen Sie die folgende Gleichung

$$\frac{(5+2i)+iz}{5+(i+1)z}=2$$

Aufgabe A.2 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

a) $$\begin{aligned}3z+2w &= 7+i\\ 5z+3w &= -1+8i\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(1+i)z+(1-i)w &= 2-2i\\ (2-3i)z+(-2+2i)w &= 5+6i\end{aligned}$$

Aufgabe A.3 Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}5x+(2+3i)y &= 42\\ 10ix+4iy &= 85i\end{aligned}$$

A.2 Kreisteilungsgleichung

Beispiel A.3 Finde alle Lösungen von

a) $z^4=e^{i\pi/4}$

b) $z^5=e^{i\pi/3}$

c) $z^8=e^{i\pi/7}$

d) $z^4=e^{2i}$

e) $z^6=64e^{i\pi/7}$

Satz A.1 *Gegeben ist ein komplexer Parameter $c=r\text{cis}\,\varphi$ Die Gleichung $z^n=c$ hat die n Lösungen*

$$\sqrt[n]{r}\text{cis}\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right) \qquad \text{wobei } k \text{ eine natürliche Zahl zwischen 0 und } n-1 \text{ ist.}$$

Spezialfall **Kreisteilungsgleichung**: *Die Lösungen der Gleichung $z^n=1$ sind $e^{2ik\pi/n}$. Die Lösungen teilen den Kreis in n gleiche Stücke auf.*

Aufgabe A.4 Finden Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome. Auch komplexe Nullstellen müssen berücksichtigt werden. Die Zahlen *dürfen* in Polarform angegeben werden. Es *kann* die Kreisteilungsgleichung verwendet werden.

a) $p_1(x) = x^7 - 1$

b) $p_2(x) = x^4 - 81$

c) $p_3(x) = x^3 + 1$ (Beachten Sie das Pluszeichen)

A.3 Quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

Aufgabe A.5 Lösen Sie die folgende Gleichung

$$z^2 + 4iz - 6 - 3i = 0$$

(Tipp: Die Lösungsformel liefert eine komplexe Zahl unter der Wurzel. Diese Zahl kann in Polarform umgewandelt werden. Die Wurzel wird gezogen, indem, wie bei der Polarform gelernt, die Wurzel aus dem Betrag gezogen wird und der Winkel halbiert wird.[2] Sodann wird die Zahl wieder in kartesische Form verwandelt.)

Aufgabe A.6 Lösen Sie

a) $(2 + 2i)z^2 - 10iz + 20i - 17 = 0$

b) $z^2 - (4 + 10i)z + 20i - 17 = 0$

A.4 Komplexe Polynome

Wenn nichts anders gesagt wird, können alle Zahlen komplex sein.

Definition A.1 *Terme der Art*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

nennen wir Polynome.

Beispiel 1 $p_1(x) = 4x^{27} + 5x^{11} + 1$

Definition A.2 *Die Zahlen vor den x heissen Koeffizienten. Diese können komplexe oder reelle Zahlen sein. Sind alle Koeffizien reell, so sprechen wir von einem reellen Polynom.*

$p_1(x)$ hat die Koeffizienten $a_{27} = 4$ und $a_{11} = 5$ und $a_0 = 1$. Alle anderen Koeffizienten sind Null. Es handelt sich um ein reelles Polynom. $(3 + 4i)x^2 + 1$ ist kein reelles Polynom.

[2]Denken Sie darüber nach, was die zweite Lösung liefert

Definition A.3 *Der höchste Koeffizient, der nicht Null ist, bestimmt den* Grad *des Polynoms*

Also ist der Grad von $p_1(x)$ gleich 27.

Wir interessieren uns nun dafür, ob Polynome bestimmte Werte annehmen können, zum Beispiel

$$4x^{27} + 5x^{11} + 1 = -4$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$4x^{27} + 5x^{11} + 5 = 0$$

Definition A.4 *$p(x)$ sei ein Polynom. Die Lösungen der* Polynomgleichung *$p(x) = 0$ heissen* Nullstellen *des Polynoms.*
Wenn komplexe Zahlen als Nullstellen nicht zulässig sind, wird in den Aufgaben nach den reellen Nullstellen gefragt.

Das Finden der Lösung von $p(x) = c$ ist also gleichbedeutend mit dem Finden der Nullstellen von $p(x) - c$.

Definition A.5 *Ein Term der Form $z - c$ heisst Linearfaktor.*

Satz A.2 *Ist c Nullstelle von $p(z)$, so lässt sich $p(z)$ schreiben als*

$$p(z) = (z - c) \cdot q(z),$$

wobei der Grad des Polynoms $q(z)$ um 1 niedriger als der Grad von $p(z)$ ist. Wir sagen, dass sich der Linearfaktor abspalten lässt.

Definition A.6 *Lässt sich der Linearfaktor $(z - c)$ insgesamt k-Mal abspalten, so sprechen wir von einer k-fachen Nullstelle.*

Aufgabe A.7 Welche Nullstellen mit welchen Vielfachheiten hat folgendes Polynom?

$$(z^2 + 1)(z - 1)(z + 2)^3$$

Aufgabe A.8 Es ist hier

$$p(x) = x^7 - 42 \text{ und } q(x) = 3x^4 + 2x^3 + x$$

Welchen Grad haben die folgenden Polynome?

a) $p(x) - q(x)$

b) $p(x) \cdot q(x)$

c) Warum ist die Frage

Was ist der Grad von $p(x) : q(x)$

nicht sinnvoll?

A.5 Das Hornerschema

Nullstellenprobleme treten bei der Lösung verschiedenster Aufgaben der Naturwissenschaften auf. Da es keine allgemeinen Lösungsformeln gibt, sind *numerische Verfahren zur näherungsweisen Berechnung* der Lösungen notwendig. Offensichtlich sind wir da an möglichst effizienten Algorithmen interessiert. Für die numerische Berechnung von Nullstellen gibt es zum Beispiel das Einschachtelungsverfahren. Am Ende dieses Abschnittes werden Sie lernen, wie dieses Verfahren effizienter eingesetzt werden kann. Wir stellen Ihnen

- ein einfaches und effizientes Verfahren zur Auswertung von Polynomen vor und
- zeigen, wie dieses Berfahren benutzt werden kann, um Linearfaktoren abzuspalten und
- so unser Nullstellenverfahren zu vereinfachen.

Wir beginnen mit einer Betrachtung über den Aufwand bei der Auswertung von Polynomen. Berechnen wir in der Darstellung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0$$

jede Potenz von z einzeln, so haben wir für eine Auswertung von $P(z)$

- n Additionen und
- $n(n+1)/2$ Multiplikationen.

Beispiel A.4 $4z^2 + 2z + 3$ gibt für $z = 3$ das Ergebnis 45 nach zwei Additionen und 3 Multiplikationen.

Der Aufwand wächst quadratisch mit dem Grad des Polynoms. Beim Grad 6 sind es bereits 21 Multiplikationen. Packen wir die Sache etwas geschickter an: Haben wir bereits z^2 berechnet, so bekommen wir z^3 mit einer weiteren Multiplikation. Genauso mit z^4 und so weiter. Der Aufwand wird so linear:

- n Additionen und
- $2n - 1$ Multiplikationen.

Schreiben wir das Polynom nun noch ein wenig um, können wir den Aufwand sogar nochmals verringern. Dazu muss geschickt ausgeklammert werden:

Beispiel A.5 $x^3 + 3x^2 + 2x + 4 = ((x + 3)x + 2)x + 4$

Hier muss noch drei Mal multipliziert und drei Mal addiert werden. Allgemein können wir das schrittweise Ausklammern schreiben als

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0 = (((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-1})z + ...a_1)z + a_0.$$

In der zweiten Darstellung benötigen wir noch

- n Additionen und
- n Multiplikationen.

Aufgabe A.9 Berechne $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = ((4x + 2)x + 3)x + 2$ für $x = 1$ und $x = 3$ und $x = 4$ indem Du die zweite Darstellung benutzt.

Aufgabe A.10 Berechnen Sie den Wert der folgenden Polynome an den Stellen $x = 2$ und $x = -3$ indem Sie sie wie oben anders schreiben:

a) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

b) $2x^3 - 5x^2 + 7x - 2$

c) $2x^3 + 2x^2 + 3$ (Vorsicht: $a_1 = 0$)

Diese Art, Polynome auszuwerten ist besonders anschaulich und einfach auszuführen, wenn wir das sogenannte Horner-Schema aufstellen (William Georg Horner 1786-1837).

Das Hornerschema

Mit den obigen Überlegungen ist eigentlich bereits klar, wie Polynome ausgewertet werden können. Das wird hier zusammengefasst – und sieht doch eher kompliziert aus. ISpätestens im nächsten Beispiel wird dann klar, wie zu rechnen ist.

1. Schreiben Sie alle Koeffizienten des Polynoms in absteigender Folge hin. (Auch diejenigen, die gleich Null sind!) Dann schreiben Sie das Argument z links in die zweite Zeile und trage a_n unter dem ersten Koeffizienten ein.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline z & & & & & & \end{array}$$

2. Nun multiplizieren Sie die Zahl in der zweiten Zeile mit z und addiere den nächsten Koeffizienten der ersten Zeile:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline & & & \downarrow + & & & & \\ z & a_n & \overset{\cdot z}{\to} & a_n \cdot z + a_{n-1} & & & & \end{array}$$

3. Wiederholen Sie den zweiten Schritt bis Sie beim letzten Koeffizienten angekommen sind. Die Zwischenresultate werden hier b_k genannt, angefangen bei $b_n = a_n$

$$\begin{array}{c|ccccccccccc} & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & \ldots & & a_1 & & a_0 \\ \hline & & & \downarrow + & & \downarrow + & & & & \downarrow + & & \downarrow + \\ z & b_n & \overset{\cdot z}{\to} & b_{n-1} & \overset{\cdot z}{\to} & b_{n-2} & \overset{\cdot z}{\to} & \ldots & \overset{\cdot z}{\to} & b_1 & \overset{\cdot z}{\to} & b_0 \end{array}$$

4. Der letzte Koeffizient b_0 ist der Wert des Polynoms an der Stelle z.

Beispiel A.6 Wie betrachten das Polynom $p(x) = 2z^3 - 2z^2 - 8z + 8$ Es soll $p(3)$ berechnet werden. Folgendermassen ist mit dem Hornerschema zu rechnen. Es gibt 4 Schritte:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -2 & -8 & 8 \\ \hline & & & & \\ 3 & 2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -2 & -8 & 8 \\ \hline & & \downarrow + & & \\ 3 & 2 \overset{\cdot 3}{\to} & 4 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -2 & -8 & 8 \\ \hline & & \downarrow + & \downarrow + & \\ 3 & 2 \overset{\cdot 3}{\to} & 4 \overset{\cdot 3}{\to} & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -2 & -8 & 8 \\ \hline & & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + \\ 3 & 2 \overset{\cdot 3}{\to} & 4 \overset{\cdot 3}{\to} & 4 \overset{\cdot 3}{\to} & 20 \end{array}$$

Der Wert des Polynoms $p(z)$ an der Stelle $z = 3$ ist damit gleich 20.

Noch einmal zur Erinnerung: Es scheint zunächst einmal komplziert zu sein, ein Polynom auf diese Art zu berechnen. Wir haben aber nur 3 Additionen und 3 Multiplikationen durchführen müssen. Steht kein Taschenrechner zur Verfügung, so hätten wir auf die gewohnte Art mehr zu rechnen gehabt: Allein der erste Summand, $2z^3$ hätte schon 4 Multiplikationen gefordert.

Der Taschenrechner wertet Polynome dann natürlich auch mit Tricks wie dem Hornerschema aus: wir legen ja Wert darauf, dass er schnell rechnet.

Es gibt aber noch einen zweiten Grund für die Verwendung des Hornerschemas. Eine Hauptarbeit in der Algebra ist ja das finden von Nullstellen, was sehr verwandt mit der Faktorisierung ist. Das Hornerschema liefert nun einen Weg, bei bekannter Nullstelle a eines Polynoms $p(z)$ eine Faktorisierung $p(z) = (z - a) \cdot q(z)$ zu finden. Das Polynom $q(z)$ hat dann einen um 1 erniedrigten Grad – und es ist leichter, von diesem Polynom weitere Nullstellen zu suchen.

Satz A.3 *Gegeben ist das Polynom $p(z) = a^n z^n + a^{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$. Sei a eine Nullstelle dieses Polynoms.*
Setzen wir nun a in das Horner-Schema ein, so ergeben sich die Zwischenresultate b_n bis b_1 (der Koeffizient b_0 ist gleich 0, da a eine Nullstelle ist.
Die b's bilden die Koeffizienten des Polynoms $q(z)$ für das gilt $p(z) = (z - a) \cdot q(z)$. Es gilt also

$$q(z) = b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \ldots b_2 z + b_1.$$

Beispiel A.7 Sei $p(z) = 2z^3 - 2z^2 - 8z - 8$, wie im letzten Beispiel. Eine Nullstelle des Polynoms ist $z = 2$, wie sich leicht nachprüfen lässt. Das Hornerschema liefert nun für die Koeffizienten b.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -2 & -8 & 8 \\ \hline 2 & b_3 = 2 & b_2 = 2 & b_1 = -4 & b_0 = 0 \end{array}$$

Dabei liefert $b_0 = 0$ die Bestätigung, dass $z = 2$ wirklich eine Lösung ist. Damit erhalten wir $q(z) = 2z^2 + 2z - 4$. Ausmultiplizieren zeigt, dass tatsächlich gilt: $(z - 2) \cdot (2z^2 + 2z - 4) = 2z^3 - 2z^2 - 8z - 8$.

Beweis des Satzes: Wir erinnern uns an die Definition der Koeffizienten b_k. Es war zum Beispiel für die Nullstelle a der höchste Koeffizient: $a_n = b_n$ und $b_{n-1} = ab_n + a_{n-1}$. Lösen wir das nach a_{n-1} auf, so ergibt sich $a_{n-1} = b_{n-1} - ab_n$.

Setzen wir nun $q(z) = b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \dots b_2 z + b_1$ und berechnen das Produkt $q(z)(z-a)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} q(z)(z-a) &= (b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \dots b_2 z + b_1)z - (b_n z^{n-1} + \dots b_2 z + b_1)a \\ &= b_n z^n + b_{n-1} z^n + \dots b_2 z^2 + b_1 z - ab_n z^{n-1} - ab_{n-1} z^{n-2} - \dots ab_2 z - ab_1 \\ &= b_n z^n + (b_{n-1} - ab_n) z^{n-1} + \dots + (b_1 - ab_2)z - b_1 a. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in den Klammern sind aber gerade die Koeffizienten a_k, wobei wir beim letzten Koeffizienten berücksichtigen müssen, dass $b_0 = 0$ gilt. □

Beispiel A.8 $p(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ hat die Nullstelle $x = 1$. (Überprüfe das durch Einsetzen.) Spalte den Linearfaktor (x-1) ab. Wir wollen also die Koeffizienten b_k berechnen in $p(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = (x-1)(b_4 x^3 + b_3 x^2 + b_2 x + b1)$ Das Horner Schema liefert.

	1	3	2	-3	-3
1	1	4	6	3	0

Es gilt also $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = (x-1)(1x^3 + 4x^2 + 6x + 3)$. Überprüfen Sie das, indem Sie ausmultiplizieren.

Aufgabe A.11 Zerlege in Linearfaktoren

a) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ (Nullstelle 3)

b) $x^3 + 6x^2 + 13x + 10$ (Nullstelle -2)

c) $x^3 + (2+i)x^2 + (1+2i)x + i$ (Nullstelle $-i$)

Aufgabe A.12 Welche Nullstellen mit welchen Vielfachheiten hat folgendes Polynom?

$$(z^2+1)(z-1)(z+2)^3(z^3-1)$$

Aufgabe A.13 Gegeben ist hier jeweils ein Polynom und eine Zahl c. Spalte, wenn möglich, vom Polynom den Linearfaktor $(x-c)$ ab. Wenn es nicht möglich ist, $(x-c)$ abzuspalten, muss das notiert werden.

a) $p_1(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8x - 48$ und $c = 2$

b) $p_2(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ und $c = 1$

c) $p_3(x) = x^4 - 10x^2 - 3x$ und $c = -3$

A.6 Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz A.4 *Ein Polynom vom Grade n hat höchstens n Nullstellen.*

Beispiel A.9 $z^2 + 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ und zwei Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Satz A.5 (Fundamentalsatz der Algebra) *Ein Polynom lässt sich in $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerlegen.*

Beispiel A.10 $z^3 - z^2 + z - 1 = (z-1)(z^2+1) = (z-1)(z-i)(z+i)$

Beispiel A.11 $z^2 + 2iz - 1 = (z+i)(z+i)$

Satz A.6 *In reellen Polynomen ist für eine komplexe Nullstelle c auch $\bar{c}$ eine Nullstelle.*

Beispiel A.12 $z^2 + 4z + 8$ hat die Nullstellen $-2 + 2i$ und $-2 - 2i$.

Satz A.7 *Ein reelles Polynom zerfällt in Linearfaktoren und quadratische Polynome.*

Beispiel A.13 $z^4 - 1 = (z+1)(z-1)(z+i)(z-i) = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

Aufgabe A.14 Stellen Sie ein möglichst einfaches Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ auf, das die folgenden Nullstellen hat. Das Ergebnis muss ausmultipliziert dargestellt werden.

$$c_1 = i \text{ und } c_2 = 1 - 2i$$

Anhang B

Lösungen

Lösungen

A. 1.1: a) $15 + 5i$ b) -40 c) $87 + 133i$ d) $60 - 35i$

A. 1.2: a) $10 - 8i$ b) $367 - 315i$ c) 15 d) -49 e) $19 + 30i$

A. 1.3: a) $10u^2 - 21v + (14u + 15uv)i$ b) $-10 - 198i$

A. 1.4: $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^8 = 1$, $i^{41} = i$, $i^{42} = -1$.

A. 1.5: Es wird nur die Formel für die Summe gezeigt. $z = x + yi$, $w = a + bi$, damit

$$\overline{z} + \overline{w} = x - yi + a - bi = (x + a) - (y + b)i = \overline{(x + a) + (y + b)} = \overline{z + w}.$$

A. 1.6: $-43 + 32i$

A. 1.7: a)$\frac{11}{10} - \frac{7}{10}i$ b)$3 + 4i$ c)$9 + 4i$

A. 1.8: a)$-12 + 5i$, $12 + 5i$, $12/169 + 5/169i$ b) $-3 - i$, $3 - i$, $3/10 - 1/10i$
c) $-5/3i$, $-5/3i$, $-3/5i$ d) $3/2$, $-3/2$, $-2/3$

A. 1.9: $2/5 - 1/5i$

A. 1.10: $-i$ und -1 (beim ersten Teil ist die Gleichung $i \cdot x = 1$ zu lösen; der zweite Aufgabenteil ist eine Kopfrechnung. Falls nicht, haben Sie zu kompliziert gedacht.)

A. 1.11: a) $4 \pm 7i$ b) $-1 \pm 0.5i$ c) $1.2 \pm i$ d) $1/2 \pm \sqrt{3}/2\, i$

A. 2.1: W

A. 2.2: Tipps zur Formulierung: a)… b) gespiegelt an … c) folgendermassen gespiegelt … d) auf der …-Achse

A. 2.3: a)x-Achse b) Vertikale bei $x = 1$ c) untere Halbebene d) Kreisfläche um Ursprung mit Radius 2

A. 2.4: Er ist der Vektor, der der Differenz $z - w$ zugeordnet ist.

A. 2.5: Bedenken Sie, der Vektor, der zu $z - w$ gehört, zeigt zum Punkt z hin.

A. 2.6: $2 - 5i$

A. 2.7: $(4\angle-\frac{\pi}{3})$ und $(4\angle\frac{2\pi}{3})$

A. 2.8: Für $z=(r\angle\varphi)$ gilt $\overline{z}=(r\angle-\varphi)$. Das Konjugieren bedeutet also Spiegelung an der x-Achse. Der Betrag bleibt unverändert.

A. 2.9: $\text{cis}42\pi=1\ \text{cis}0=1$

A. 2.10: a) $1/z=(1/4\angle-\Pi/6$ b) Es ergibt sich die Formel des folgenden Satzes c) siehe Teil b).

A. 2.11: a) $1/2-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $2.62+1.06i$

A. 2.12:

a) $wz=(6\angle\pi/12)$ und $z:w=(1.5\angle\pi/12)$. Multiplikation mit w bedeutet Streckung mit dem Faktor 2, Division Stauchung auf die Hälfte. Winkel ändern sich nicht.

b) umgekehrt wie im letzten Teil.

c) $wz=(3\angle\pi/3)$ und $z:w=(3\angle-\pi/6)$. Multiplikation mit $\text{cis}\pi/4$ bedeutet Drehung gegen den Uhrzeigersinn um 45 Grad, Division ist Drehung mit dem Uhrzeigersinn.

d) $wz=(6\angle7\pi/12)$ und $z:w=(3/2\angle-5\pi/12)$. Multiplikation mit $2i$ bedeutet Streckung mit dem Faktor 2 und Drehung um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn. Division bedeutet Stauchung und Drehung mit dem Uhrzeigersinn.

e) $wz=(4.5\angle\pi/4)$ und $z:w=(2\angle-\pi/12)$ Wieder Streckung und Drehung.

A. 2.13:

a) $\text{cis}\,3\pi/10$ b) $\text{cis}\,47\pi/24$ c) $\text{cis}\,\pi/6$ d) 42

A. 2.14:

a) $\overline{z}=4\text{cis}\,-\pi/3,\ -z=4\text{cis}\,4\pi/3$ b) $\overline{z}=\frac{1}{3}\text{cis}\,-\pi/4,\ -z=\frac{1}{3}\text{cis}\,5\pi/4$

A. 2.15: $2-2i$

A. 2.16: $z^7=0.2097\text{cis}\,60°$. In der Zeichnung ergibt sich beim Verbinden der Punkte eine Spirale.

A. 2.17:

a) $\text{cis}\,\frac{3\pi}{8}$ b) $\text{cis}\,\frac{7\pi}{5}$ c) $\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$

A. 3.1: siehe Formelsammlung

A. 3.2: $\sin t=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

A. 3.3: Interessanterweise ergeben sich immer Schwingungen mit gleicher Frequenz, aber verschiedenen Phasen und Amplituden. Es ist nicht offensichtlich, wie sich Phase und Amplitude der Summe bestimmen lassen.

A. 3.4: Beide Funktionen sind praktisch gleich.

A. 3.5: a) 0 b)$5.89\cos(t+0.57)$ c) $8.22\cos(t+1.096)$

A. A.1: $z=-8/5+i9/5$ **A. A.2:** a) $(1+i|2-i)$ b) $(2+i|3-2i)$

A. A.3: $x = 8.5 - 2/30i$, $y = 1/6i$ **A. A.4:** a) $e^{i2k\pi/7}$ b) $3e^{ik\pi/2}$ c) $e^{i(\pi+2k\pi)/3}$

A. A.5: $2.01e^{-0.58i}$ und $3.35e^{-2.09i}$

A. A.6: a) $2.96e^{-0.21i}$ und $3.14e^{1.70i}$ b) $7.28e^{1.29i}$ und $3.61e^{0.98i}$

A. A.7: mit Vielfachheit eins sind es: $\pm i$, 1 und dreifache Nullstelle -2.

A. A.8: a) 7 b) 11

A. A.9: 11; 137; 302 **A. A.10:** a) 106; 256 b) 8; -122 c) 27; -33

A. A.11: a) $(x-3)(x+2)(x+3)$ b) $(x+2)(x^2+4x+5) = (x+2)(x+2-i)(x-2-i)$ c) $(x+1)(x+i)^2$

A. A.12: mit Vielfachheit eins sind es: $\pm i$, $e^{\pm 2\pi i/3}$, doppelte Nullstelle 1 und dreifache Nullstelle -2.

A. A.13: a) $2x^2 + 8x + 24$ b) geht nicht c) $x^3 - 6x^2 - x$

A. A.14: $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$