Universität Bern
Institut für Erziehungswissenschaften
Abteilung für Fachdidaktik
Diplomstudiengang in Fachdidaktik

Innermathematisches Experimentieren in Lernumgebungen in der Sekundarstufe II

Ein Forschungs- und Entwicklungsprojekt

Dr. Torsten Linnemann
Mai 2012

Diplomarbeit, eingereicht bei
Prof. Dr. Inge Schwank
Universität Osnabrück

Autor
Dr. Torsten Linnemann
Kleinriehenstrasse 79
4058 Basel
torsten.linnemann@fhnw.ch

Inhaltsverzeichnis

Danksagung: Danken möchte ich meiner Betreuerin Prof. Dr. Inge Schwank, und Prof. Dr. Armin Hollenstein, Prof. Dr. Helmut Linneweber sowie Prof. Dr. Timo Leuders für wertvolle Tipps.

Mein besonderer Dank gilt Kathleen Philipp, die mich auf die Idee zu diesem Projekt gebracht hat und deren Hinweise und Arbeit wichtigen Einfluss auf hatten.

Schliesslich möchte ich mich noch bei Heike Sönksen (www.atelier-soenksen.com*)* bedanken, die meine Arbeit professionell lektoriert hat.

1 Einführung

1.1 Einleitung

Diese Arbeit wurde im Rahmen des Studiengangs "Diploma of Advanced Studies in Fachdidaktik - Didaktik der Mathematik" verfasst.

In der Doppelfunktion des Autors als Lehrperson am Gymnasium Oberwil, Basel-Land, und als Fachdidaktiker an der Pädagogischen Hochschule Fachhochschule Nordwestschweiz war zu Anfang des Studiums klar, dass die Diplomarbeit mit der Entwicklung von Unterrichtsmaterialien zu tun haben sollte.

Im Laufe der Konzeptionierung hat sich allerdings der Schwerpunkt der Arbeit hin zu einer Forschungsarbeit verschoben. Die zentralen Fragestellungen lauten nun:

- Leuders, Naccarella, Philipp (2011) haben mittels mündlich geführten Interviews mit Primarschülerinnen, Primarschülern und Studierenden des Lehramts Primarstufe ein Kategoriensystem für innermathematisches Experimentieren erarbeitet. Lässt sich dieses Kategoriensystem auf schriftliche Arbeiten in der Sekundarstufe II übertragen?
- Wie hängt innermathematisches Experimentieren mit Persönlichkeitsmerkmalen wie zum Beispiel Selbstwirksamkeit zusammen?
- Welche Bedingungen und Erfolgsstrategien für innermathematisches Experimentieren lassen sich feststellen?

Die Kombination von Forschungs- und Entwicklungsanteilen spiegelt sich im Aufbau der Arbeit wieder:

- Im Abschnitt **Lernumgebungen - Entwicklungsprojekt** wird die Wahl der verwendeten Unterrichtsmaterialien begründet. Dann werden die im Laufe der Arbeit an der Diplomarbeit entwickelten Lernumgebungen dargestellt, ihre fachliche und curriculare Einbettung dargestellt.
- Es folgt die theoretische Begründung des Forschungsprojektes: **Experimentieren im Mathematikunterricht.**
- In **Interaktionsstudie, Design und Ergebnisse** werden die Methoden und Ergebnisse des Forschungsvorhabens geschildert. Dieser Abschnitt stellt den Hauptteil der Diplomarbeit dar und wird nun genauer beschrieben:

Für die Untersuchungsphase wurden drei Klassen der Fachmittelschule des Gymnasiums Oberwil besucht. Hierbei handelt es sich nicht um Klassen des Autors.

Zunächst wurde eine Lernumgebung zu binomischen Formeln eingesetzt, der Unterricht wurde durch den Autor durchgeführt. Hauptziele waren die Gewöhnung an das Arbeiten in Lernumgebungen, sowie das gegenseitige Kennenlernen von Autor und Klassen.

Nach dieser Klasse wurde durch den Autor in den drei Klassen eine Lernumgebung zu Reihenfolgezahlen eingesetzt.

Die Bearbeitung dauerte ca 30 Minuten. Ausserdem wurden mit je zwei Schülerinnen und Schülern der Klassen fünfzehnminütige Interviews geführt.

Die Auswertung wird in dieser Diplomarbeit in drei Schritten durchgeführt:

- Im ersten Teil werden in einer **qualitativen** Untersuchung die Ergebnisse einer Arbeit von Leuders, Naccarella, Philipp (2011) verifiziert. Es wird untersucht, ob das Kategoriensystem von Leuders et al auch in unserem Setting, Fachmittelschule und schriftliche Bearbeitung, sinnvoll anwendbar ist.
- Im zweiten Schritt werden die Ergebnisse genutzt, das Kategoriensystem theoriegeleitet zu vereinfachen und **quantitative** Ergebnisse extrahiert: Zusammenhänge zwischen verschiedenen Aspekten des Experimentierens und Persönlichkeitsmerkmalen. Verwendet werden wieder die schriftlichen Bearbeitungen.
- Der dritte Schritt ist wieder **qualitativ:** Mit Hilfe der Interviews und den zu den Interviewten gehörigen schriftlichen Bearbeitungen werden Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren

gesucht. Dabei werden die Ergebnisse des zweiten Schrittes ordnend genutzt.

Schliesslich bleibt es, die Arbeit abzuschliessen, nicht ohne vorher die Ergebnisse zusammenzufassen. Abgeschlossen wird mit einem Ausblick in weitere Untersuchungen.

1.2 Die Fachmittelschule

Die Fachmittelschule (FMS) ist eine dreijährige allgemeinbildende Vollzeitschule. Sie wird von Schülerinnen im Anschluss an das 9. Schuljahr besucht.

Die FMS wurde in den letzten sechs Jahren in den meisten Schweizer Kantonen als Zubringer für tertiäre Ausbildungen in den Bereichen Gesundheit, Soziales, Pädagogik und Kunst geschaffen. Die Schülerinnen schliessen mit einem Fachmittelschulausweis ab, können aber in einigen Bereichen, zum Beispiel der Pädagogik, ein weiteres Jahr die Schule besuchen und die Fachmatur erwerben. Diese bietet Zugang zu ausgewählten Fachhochschulen.

Die FMS ist also eine relativ neue Schulform, entstanden vor allem aus den früheren Diplommittelschulen. Sie nimmt aber auch Funktionen der ehemaligen Lehrerseminarien wahr (Unterseminar). In vielen Kantonen ist die FMS Hauptzubringer für die Ausbildung zur Primarschullehrperson und zur Kindergärtnerin/ zum Kindergärtner.

In den verschiedenen Berufen wird sehr unterschiedliche Mathematik benötigt. So dient die Mathematik im Bereich Gesundheit vor allem notwendigen Berechnungen im Berufsalltag und die angehenden Primarlehrpersonen im Schwerpunkt Pädagogik müssen mit den vielseitigen Anforderungen, die Mathematikunterricht an der Primarschule erfordert, umgehen lernen.

Mathematikunterricht an der FMS ist eine Herausforderung, eine an die spezielle Situation angepasste Didaktik wurde bislang nicht entwickelt.

Die vorliegende Diplomarbeit hat begonnen als Entwicklungsprojekt für eine Fachdidaktik Mathematik an der FMS - der Schwerpunkt hat sich verschoben zu einem Forschungsprojekt zum innermathematischen Experimentierern. Die Arbeit kann als Pilotprojekt für weitere Untersuchungen an der FMS betrachtet werden, wie im "Ausblick" am Ende der Arbeit dargelegt wird.

2 Lernumgebungen - Entwicklungsprojekt

2.1 Substanzielle Lernumgebungen

Bei einer "substanziellen Lernumgebung" handelt es sich um eine reichhaltige und vielfältige Aufgabenstellung, die verschiedenen Kriterien genügen soll. Diese werden von Wittmann (1998, zitiert nach Hirt und Wälti, 2008) folgendermassen beschrieben:

1. "Sie müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentieren.
2. Sie müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schülerinnen und Schülern bieten.
3. Sie müssen flexibel sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer Klasse anzupassen sein.
4. Sie müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und so ein weites Potenzial für empirische Forschung liefern."

Eine grosse Stärke dieser Lernumgebungen ist die natürliche Differenzierung. Lernumgebungen sollten einen Einstieg für alle Lernenden bieten- und dann Bearbeitungsmöglichkeiten für alle, auch für Hochbegabte, anbieten. Es ist also nicht nötig, den Lernenden verschiedene Aufgaben anzubieten. Eine grosse Auswahl an Lernumgebungen findet sich in den beiden Büchern "Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte" (Hengartner, Hirt und Wälti, 2006) und "Lernumgebungen im Mathematikunterricht" (Hirt und Wälti, 2008).

Lernumgebungen sind zunächst dem Konzept von "Mathematikdidaktik als Design Science" (Wittmann, 1992). Die vierte Forderung erweist sich dabei als wichtig, Lernumgebungen auch empirischer Forschung zugänglich zu machen. Leuders, Naccarella und Philipp (2011) nutzen eine Lernumgebung, um eine Theorie des innermathematischen Experimentierens zu erarbeiten.

Durch das offene Setting von Lernumgebungen ist es möglich, auch die Kompetenzorientierung, die in Deutschland mit den KMK-Standards (Kultusministerkonferenz, 2004) und in der Schweiz mit Harmos (EDK, 2011) zentral geworden ist, einzuarbeiten.

Die konstruktivistische Grundhaltung, die den Arbeiten von Wittmann und dem Projekt Mathe 2000 zugrunde liegt, ist zunächst einmal philosophisch, erkenntnistheoretisch begründet.

Sie lässt sich aber auch empirisch identifizieren und beforschen. So wird in der Coactiv-Studie festgestellt:

"Transmissive Überzeugungen von Lehrkräften korrelieren negativ mit Lernerfolg (-.24), konstruktive positiv (.32)." (Kunter und Baumert, 2011, Seite 248)

2.2 Bildungsstandards, Kompetenzen und Lernumgebungen

Sowohl in Deutschland, mit den Standards der Kultusministerkonferenz, KMK (2004), als auch in der Schweiz, mit den Standards der Erziehungsdirektorenkonferenz, EDK (2011) wurde festgelegt, dass der Output des Mathematikunterrichts an verschiedenen Kompetenzen gemessen wird.

Das Konzept der Bildungsstandards mit ihrem Anspruch der Messbarkeit scheint nur schwer zu vereinen mit dem Arbeiten in Lernumgebungen in sehr offenen Kontexten. Andererseits sind die Kompetenzen von KMK und EDK sehr breit angelegt, referenzieren nicht nur auf die leicht messbaren Fertigkeiten im Bereich der Algorithmen, sondern zum Beispiel auch auf das Problemlösen, Mathematisieren, Argumentieren, Kommunizieren, Darstellen. Während der Arbeit an Lernumgebungen sind die Schülerinnen in diesen Bereichen tätig. Lernumgebungen sollten also einen gewichtigen Teil zum langfristigen Kompetenzaufbau beitragen können. Für eine ausführliche Diskussion dieser These sei auf Hirt und Wälti (2008) verwiesen. Wichtig ist nun, diese These auch empirisch zu belegen. Im Bereich der Sekundarstufe II gibt es dazu nicht viel Material, die vorliegende Diplomarbeit kann einen Teil dazu beitragen.

2.3 Lernumgebungen in der Fachmittelschule

Die Fachmittelschule (FMS) zeichnet sich durch eine grosse Heterogenität aus. Zum einen stammen die Schülerinnen und Schüler aus verschiedenen Klassen – und im wenig normierten Schweizer Schulsystem hat die Lehrperson grossen Gestaltungsfreiraum – zum anderen sind auch die späteren Berufsanforderungen in den verschiedenen Schwerpunkten völlig verschieden. Es muss nicht, wie bei einer Berufsausbildung, eine gewisse Homogenität in den Fertigkeiten angestrebt werden. Es ist sogar so, dass der allgemeinbildende Charakter des Mathematikunterrichts in einigen Schwerpunkten im Zentrum steht. Dies findet sich wieder im Rahmenlehrplan für die FMS, deren Mathematikteil wie folgt beginnt:

> "Der Unterricht entwickelt die Fähigkeit des logischen und abstrakten Denkens. Die geistige Beweglichkeit wird gefördert, indem einerseits der Schritt vom Konkreten zum Abstrakten geübt wird und andererseits der Transfer von der mathematischen Formulierung zur Praxis hergestellt wird. Die Lernenden erweitern ihre Kompetenz in einer Sprache, deren Symbole eine exakte Beschreibung von Gesetzmässigkeiten erlaubt. Das trägt dazu bei, dass die Schülerinnen und Schüler für die verschiedensten Problemstellungen offen bleiben und ihre Fähigkeit, Probleme zu lösen, fördern."(EDK, 2004)

Dieser Text lässt grosse Freiräume bei der Umsetzung. Kompetenzorientiertes und verständnisorientiertes Unterrichten sind, obwohl nicht explizit gefordert, möglich. Der Rahmenlehrplan nennt die folgenden Stoffgebiete, die behandelt werden müssen:

- "Rechnen mit Grössen, Potenz- und Wurzelrechnung
- Prozent-, Zins- und Zinseszinsrechnung, Wachstum und Zerfall
- beschreibende Statistik; Wahrscheinlichkeitsrechnung
- lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit mehreren Variablen, quadratische Gleichungen
- lineare und quadratische Funktionen; Logarithmen und Exponentialfunktionen
- Trigonometrie und Stereometrie" (EDK, 2004)

Es werden keine Stoffe verlangt, die in einigen anderen Schulformen nicht bereits in der 10. Klasse behandelt werden. Der Stoffdruck ist nicht übermässig gross.

Lernumgebungen mit ihrem Potenzial zur natürlichen Differenzierung können eine Umsetzungsmöglichkeit für die Freiräume anbieten. Anstatt, unnötig, zu automatisieren, können Kompetenzen wie Problemlösen und Argumentieren langfristig geschult werden. Die Schülerinnen und Schüler haben die Chance, den experimentellen, induktiven Charakter der entstehenden Mathematik kennenzulernen:

"Die streng dargestellte Mathematik ist eine systematische, deduktive Wissenschaft, aber Mathematik im Entstehen ist eine experimentelle induktive Wissenschaft."(Polya, 1949, S. 136)

Bei der Begründung der Methode der Lernumgebungen darf schliesslich nicht vergessen werden, dass ein guter Teil der Schülerinnen und Schüler das Berufsziel P"rimarlehrperson" haben - und in der Ausbildung zur Primarlehrperson spielt diese Vorgehensweise eine grosse Rolle. In den Kantonen der Nordwestschweiz ist das Schweizer Zahlenbuch (beispielsweise Affolter et al 2009) obligatorisches Lehrmittel - und dieses setzt Lernumgebungen zentral ein.

2.4 Lernumgebung 1: Binomische Formeln

In traditionellen Algebra-Unterrichtseinheiten werden die geometrischen Formeln vor allem im Zusammenhang mit Termen mit Variablen behandelt. Historisch sind sie aber bereits viel länger bekannt. Im antiken Griechenland wurden Sie mit Hilfe geometrischer Argumente veranschaulicht. Bereits Euklid benutzt in seinem Buch II Darstellungen analog zur Visualisierung in der vorliegenden Lernumgebung (Wussing, 2008). Im Sinne einer genetischen Sichtweise sollte diese Herangehensweise erwogen werden.

Weiter ist die Verwendung der binomischen Formeln als Rechenhilfe zu betonen, beispielsweise

$$13 \cdot 17 = (15-2)\cdot(15+2) = 15^2 - 4^2 = 225 - 4 = 221$$

Die geometrisch orientierte Herangehensweise wird im in der Schweiz häufig eingesetzten mathbu.ch. (Affolter et al, 2003) gewählt. Im Band 8 werden die schon häufig, beispielsweise für das Distributivgesetzt, verwendeten Rechteckfelder eingesetzt, um zunächst Rechenoperationen mit negativen Zahlen (Lernumgebung 21) zu erklären und dann die Multiplikation von Binomen anzustossen (Lernumgebung 22). Dies stellt ein schönes Beispiel der Anwendung zentraler mathematischer Prinzipien von der Primarschule (in der die Rechteckfelder zur Multiplikation verwendet werden können) bis zur Sekundarstufe I dar.

Die für diese Lernumgebung entworfene Lernumgebung 1, binomische Formeln, ist als Einführung in die quadratischen Gleichungen verwendbar - und damit ergibt sich auch ein Übergang an die Sekundarstufe II. Für die geometrische Begründung der quadratischen Gleichungen ist vor allem Al-Hwarizmi, der Begründer der Algebra, zu nennen (Wussing 2008).

Wichtig ist die Darstellung der Einbettung in das normale Curriculum - die Lernumgebung kann völlig in den Unterricht integriert werden, hat Anknüpfungspunkte an weitere Themen. Dies kann die Akzeptanz bei Lehrkräften massiv erhöhen.

Im Anhang 1 wird die gesamte Lernumgebung, komplett mit Kommentaren für die Lehrpersonen, dargestellt. .

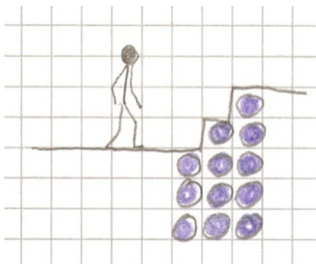
2.5 Lernumgebung 2: Treppenzahlen

Treppenzahlen, auch Reihenfolgezahlen genannt, haben sich in der Mathematikdidaktik als fruchtbarer Lehr- und Forschungsgegenstand erwiesen, wiederzufinden im Abschnitt "Treppenzahlen, didaktische Aufarbeitungen". Zunächst zum mathematischen Hintergrund:

2.5.1 Satz von Sylvester

Definition: Eine natürliche Zahl *t* wird als **Treppenzahl** bezeichnet, wenn sie sich als Summe mindestens zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beschreiben lässt.

Jede Darstellung der Zahl *t* als Treppenzahl heisst **Treppenzahldarstellung** der Zahl *t* . Die Zahl *m* der Summanden heisst **Stufenanzahl**.



Beispiel: 12=3+4+5

Hier ist n=3 und m=3. Die Summe 3+4+5 ist die Treppenzahldarstellung.

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Bedeutung der Worte Treppenzahl und Stufenanzahl.

Es existieren Zahlen, die sich auf mehrere Arten als Treppenzahlen darstellen lassen, z.B.

t=9=4+5=2+3+4 und Zahlen, die sich nicht als Treppenzahlen darstellen lassen, beispielsweise 8.

Zusammenfassen lassen sich die Ergebnisse im Satz von Sylvester:

Satz von Sylvester: Jede Zahl lässt sich auf so viele Arten als Summe mindestens zweier aufeinander folgender Zahlen darstellen, wie sie ungerade Teiler >1 hat.

Die Formulierung des Satzes ist aus Scherer, Steinbring (2004) entnommen, wo der Satz mit Hilfe eines operativen Beweises bewiesen wird. Selter, Spiegel (1997) wählen einen Beweis, der negative Zahlen nutzt und arithmetische Begründungen verwendet. Der hier dargestellte Beweis folgt dieser Linie.

Wir beginnen mit einem Beispiel:

Die Zahl 18 hat 9 als ungeraden Teiler. Es ist 18:9=2. Wir stellen 18 als Summe von 9 aufeinanderfolgenden Zahlen mit 2 als mittlerer Zahl (gleichzeitig Mittelwert der 9 Zahlen) dar:

$$18 = -2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \qquad (1)$$

Die negativen Zahlen heben sich mit den betragsgleichen positiven Zahlen weg. Auch die Null muss nicht geschrieben werden. Es bleibt eine Darstellung als Treppenzahl aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen:

$$18 = 3 + 4 + 5 + 6$$

Dies lässt sich offensichtlich mit jedem ungeraden Teiler so durchführen.

Gezeigt wurde damit: Zu jedem ungeraden Teiler gehört eine Treppenzahldarstellung.

Es bleibt zu zeigen, dass sich zu jeder Treppenzahldarstellung ein ungerader Teiler finden lässt.

Sei eine Treppenzahldarstellung mit ungerader Stufenanzahl m gegeben. Der Summand *s* in der Mitte ist dann der Mittelwert der Summanden und es gilt $t = m \cdot s$. Die Stufenanzahl ist also bereits ein ungerader Teiler. (Beispiel: $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 5 \cdot 4 = 20$)

Sei eine Treppenzahldarstellung mit gerader Stufenanzahl m gegeben. Das Beispiel mit der 18 zeigt, wie vorzugehen ist:

Wenn die Treppenzahldarstellung mit der Zahl b+1 beginnt , so ergänzen wir die Summe mit allen Zahlen bis -b und erhalten eine Darstellung als Summe von -b bis $b+m$. Beim Beispiel (1) oben ist $b=2$ und $m=4$.

Diese Darstellung hat $u = m + 2b + 1$ Summanden. Die mittlere Zahl *s* der Darstellung ist der Mittelwert und $t = u \cdot s$. Die ungerade Zahl *u* ist also ein Teiler von *t*.

Damit ist der Satz von Sylvester bewiesen. Einfache Folgerungen sind:

- Potenzen von 2 besitzen keine Treppenzahldarstellung
- Jede ungerade Zahl hat eine Darstellung mit Stufenanzahl 2. Beispiel: 11=5+6

Es gibt eine komplementäre Aussage zum Satz von Sylvester, die in der Studie auch von einer Gruppe von Schülerinnen und Schülern entdeckt wurde:

Satz (Teilbarkeitsbedingung): Sei *t* eine natürliche Zahl.

Für jede ungerade Zahl *u*, für die *t:u* eine natürliche Zahl gibt, existiert eine Treppenzahldarstellung von *t* mit *u* Stufen.

Für jede gerade Zahl g für die *t*:g=*e* eine Zahl *e* ergibt, so dass 2*e* natürlich ist, besitzt *t* eine Treppenzahldarstellung von *t* mit g Stufen.

Der erste Teil des Satzes ist klar nach dem obigen. Der zweite Teil ergibt sich aus der Verallgemeinerung des folgenden Beispiels:

60:8=7.5, das gibt eine Treppenzahldarstellung mit 8 Stufen und der 7.5 in der "Mitte":

4+5+6+7+8+9+10+11

2.5.2 Treppenzahlen, didaktische Aufarbeitungen

Schwätzer und Selter (1998) untersuchen Interviews mit 18 Viertklässlern in Zweiergruppen zu den Treppenzahlen. Die Schülerinnen und Schüler werden gebeten, alle Treppenzahldarstellungen bis zur Zahl 25 zu finden. Es werden verschiedene Strategien aufgeführt, alle Darstellungen zu finden. Die Interviews liefen in drei Phasen ab: Verstehen der Aufgabe, Finden aller Lösungen, Begründung der Vollständigkeit. Bei der Begründung waren die Gruppen oft erfolgreich. Nur eine Gruppe sah die Relevanz einer

Begründung nicht ein. Dies widerspricht den Beobachtungen von Winter (1983), der allgemein einen Mangel an Begründungsbedürfnis konstatiert. In der vorliegenden Untersuchung war die Aufgabe offener gestellt. Trotzdem wurde in rund der Hälfte der Bearbeitungen eine Liste der ersten Treppenzahlen angefertigt. Eine Begründung der Vollständigkeit der Auflistung wurde aber nie angestrebt. Da auch keine obere Grenze der Zahlen angegeben war, war dies auch nicht naheliegend.

Schwätzer und Selter (2010) haben eine ausführliche Ausarbeitung für eine Lernumgebung zu Treppenzahlen in der vierten bis sechsten Klasse ins Internet gestellt. Auch in Selter, Spiegel (1997) findet sich eine analoge Abhandlung.

Scherer und Steinbring (2007, 2007b) stellen Treppenzahlen als Aufgabendarstellung für Studierende vor, ohne aber empirische Untersuchungen durchzuführen.

Schelldorfer (2007) setzt Treppenzahlen in der 9. Klasse eines Gymnasiums ein. Seine Fragen an die Lernenden sind: "Welche natürlichen Zahlen lassen sich mit einer solchen Summe darstellen? Welche nicht? Kannst du erklären, warum?" Er wertet Lerntagebücher der Schülerinnen und Schüler aus und stellt damit die didaktische Ergiebigkeit der Treppenzahlen dar.

Der Fokus dieser Bearbeitungen liegt darauf, die Bedeutung substanzieller Lernumgebungen im Mathematikunterricht darzustellen.

Leuders, Naccarella und Philipp (2011) verwenden nach einer kurzen Erklärung der Treppenzahlen einfach die Frage "Was kannst du alles über Treppenzahlen herausfinden?". Die Forschungsrichtung der Bearbeitenden ist sehr offen gewählt. Sie führen sowohl Interviews mit Schülerinnen und Schülern als auch mit Lehramtsstudierenden. Mehr dazu im Abschnitt "Das 3-Räume-Modell von Leuders, Naccarella, Philipp".

In unserer Untersuchung wird diese Aufgabe mit kleinen Änderungen übernommen, siehe Anhang 2.

3 Experimentieren im Mathematikunterricht - Theorieteil Interaktionsstudie

3.1 Induktion und experimentelles Arbeiten in der Mathematik

Polya (1949) "How to solve it" liefert eine oft aufgenommene Handlungsanweisung zum Lösen mathematischer Probleme. Er postuliert die Wichtigkeit heuristischer Strategien. In der vorliegenden Diplomarbeit ist ein Aspekt des Problemlösens wichtig:

> "Induktion ist die Methode, allgemeine Gesetze durch Beobachtung und Kombination besonderer Fälle zu entdecken. " (Polya 1949)

Laut Pellegrino und Glaser (1982) ist

> "the inductive reasoning factor (…), which can be extracted from most aptitude and intelligence tests, is the single best predictor of academic performance and achievement test scores."

Auch in der Mathematik spielt Induktion eine Rolle:

> Die streng dargestellte Mathematik ist eine systematische deduktive Wissenschaft, aber Mathematik im Entstehen ist eine experimentelle induktive Wissenschaft." (Polya, 1949)

Im Lichte dieser Aussage ist es überraschend, dass induktives Argumentieren nicht intensiver in der Fachdidaktik erforscht wurde. Ein wichtiger Artikel in diesem Bereich stammt von Haverty et al (2000). Sie schlagen vor, induktives Argumentieren in drei Aspekte aufzuteilen: Data Gathering (Datensammlung), Pattern Finding (Finden von Mustern) und Hypothesis Generation (Hypothesenbildung). In einer qualitativen Studie mit Studierenden untersuchen sie die Vorgehensweise von Studierenden beim Finden einer Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion aus einer gegebenen Wertetabelle.

Sie stellen fest, dass das Ausmass von Data Gathering sich nicht unterscheidet bei erfolgreichen und weniger erfolgreichen Teilnehmenden. Wichtig scheint der Wechsel zwischen Mustersuche und Hypothesenbildung zu sein. Bleiben die Probanden in einem der Bereiche, so stellt sich kein Erfolg ein. Bei einem Überhang an Pattern Finding werden algebraische Zusammenhänge nicht erschlossen, bei einem Überhang an Hypothesis Generation werden die Daten nicht hinreichend gut ausgenutzt.

Die Aufgabe in Haverty et al (2000) ist so aufgebaut, dass es mehrere Schritte braucht, zum Ergebnis zu kommen. Erfolgreiche Strategien basieren auf dem Verfolgen einer Idee (Pursue Strategies). Im Unterschied dazu stellt das Aufstellen von richtigen Hypothesen in unserer Studie bereits eine erfolgreiche Bearbeitung dar - der Zusammenhang zwischen Pattern Finding, Hypothesis Generation und erfolgreicher Bearbeitung kann also nicht nachvollzogen werden.

3.2 Das 3-Räume-Modell von Leuders, Naccarella, Philipp

In diesem Abschnitt wird die Arbeit "Experimentelles Denken - Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren" von Leuders, Naccarella und Philipp (2011) beschrieben.

3.2.1 Theoriebildung

Innermathematisches Experimentieren definieren Leuders et al folgendermassen:

> "(…).dass der hier in den Fokus genommene Phänomenbereich rein mathematische Sachverhalte ohne spezifischen Realitätsbezug umfasst. Gegenstand der Experimente sind mathematische Entitäten (z.B. Zahlen oder Figuren) und deren Zusammenhänge". (Leuders, Naccarella, Philipp (2011), S. 210)

In ihrer Arbeit gehen sie vom epistomologischen Modell von Peirce (1965) aus, demzufolge wissenschaftliches Schliessen in drei Formen auftritt: Abduktion, Induktion und Deduktion.

Beim innermathematischen Experimentieren gerät dabei die Deduktion nicht zentral in den Fokus.

Wichtiger ist das Generieren von Hypothesen, die Abduktion. Diese Hypothesen werden dann mit Induktion belegt - oder auch per Induktion nahegelegt. Der kreative Akt beim Erkenntnisgewinn liegt also in der Abduktion.

> „Die Abduktion bezeichnet den Vorgang, bei dem eine erklärende Hypothese gebildet wird. Mit Induktion wird der gegenläufige Prozess des Hypothesenprüfens am Phänomen bzw. am Beispiel benannt. Bei der Deduktion wird durch logische Schlussfolgerungen eine Vermutung bewiesen. In diesem Sinne ist die Deduktion nicht erkenntniserzeugend, der kreative Akt beim Erkenntnisgewinn liegt in der Abduktion.“ (Leuders et al, 2011)

Mit diesen Erklärungen lässt sich innermathematisches Experimentieren präziser formulieren:

> „Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen, welches sich in einem konkreten Phänomenbereich an Beispielen vollzieht – nach Peirce also das abduktive und induktive Vorgehen – wird im Folgenden als innermathematisches Experimentieren bezeichnet.“ (Leuders et al 2011)

Leuders et al erweitern also das Modell von Polya (1945), das von Haverty et al (2000) benutzt wird.

Um nun Prozesse der Induktion und Abduktion beschreiben zu können, gehen Leuders et al vom Konzept des „Scientific Discovery as Dual Search“ (SDDS) von Klahr und Dunbar (1988) aus.

Klahr und Dunbar unterscheiden einen Hypothesensuchraum, in dem Vermutungen aufgestellt werden, und einen Experimentesuchraum, in dem Experimente generiert werden, um einerseits Hypothesen generieren zu können und andererseits Hypothesen prüfen zu können.

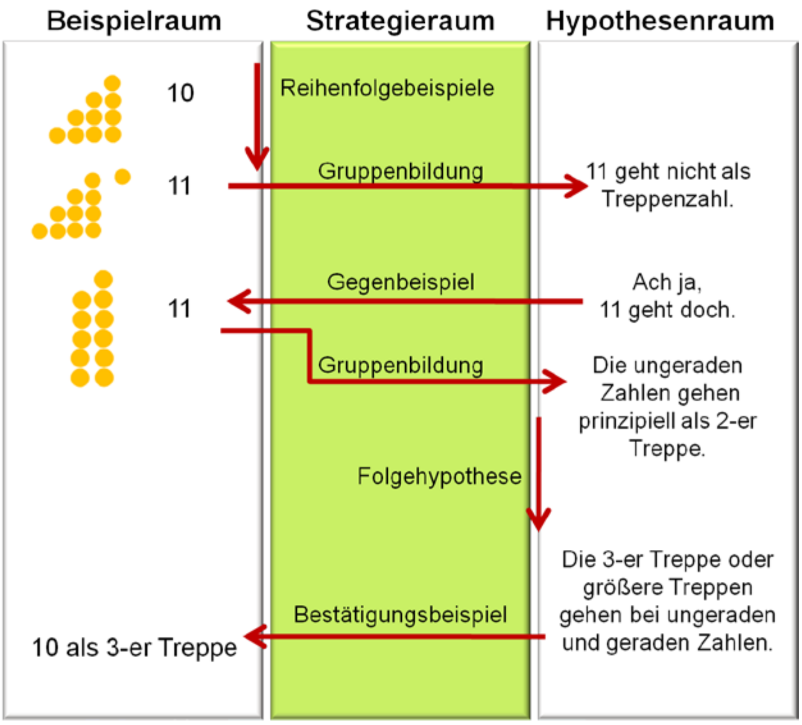
Leuders et al untersuchen in Interviews das Verhalten von Schülerinnen, Schülern und Studierenden bei Aufgaben, die mathematisches Experimentieren erfordern. Die Analyse der Interviews mit Hilfe von Grounded Theory führt zu vier Familien von Codes:

- Beispiele
- Ordnung/Struktur
- Hypothesen
- Hypothesenprüfung (Leuders et al, 2011, S. 222)

Die erste Familie, Beispiele, entspricht dem Experimentesuchraum von Klahr und Dunbar, die dritte Familie, Hypothesen, dem Hypothesensuchraum. Die beiden anderen Familien vermitteln dazwischen. Ordnung/Struktur beinhaltet Strategien, Hypothesen zu generieren, Hypothesenprüfung beinhaltet Strategien, Hypothesen mit Beispielen zu prüfen.

Für diese beiden Familien schlagen Leuders et al einen dritten Raum, den Strategieraum vor.

Ihr Modell besteht also aus einem Beispielraum, einem Strategieraum und einem Hypothesenraum (S. 224). Dies veranschaulichen sie mit folgender Illustration am Beispiel der Treppenzahlen:



(Darstellung übernommen aus Leuders et al, 2011)

3.2.2 Die Untersuchung

Leuders et al führen Interviews einerseits mit Primarschülerinnen und Primarschülern und andererseits mit angehenden Primarschullehrpersonen. Sie analysieren Bearbeitungen von Treppenzahlen mit Hilfe von Grounded Theory. Zunächst werden 15 Interviews von Studierenden grob transkribiert um einen Überblick zu gewinnen und dann die Bearbeitungen von vier Studierenden und zwei Schülerinnen und Schülern feiner analysiert. Resultat ist zum einen das obige 3-Räume-Modell und zum anderen ein Kategoriensystem zur Beschreibung der Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren.

Da dieses Kategoriensystem auch in unserer Studie benutzt wird, ist es im Anhang 4 komplett aufgeführt.

4 Interaktionsstudie – Design und Ergebnisse

4.1 Ablauf der Interaktionsstudie

An der Studie haben drei Klassen teilgenommen, eine 1. FMS (entsprechend einer 10. Klasse), eine 2. FMS (11. Klasse) und eine 3. FMS, insgesamt n=62 Schülerinnen und Schüler.

Die Klassen wurden informiert, dass der Autor eine Studie durchführen möchte.

- Zunächst haben die drei Mathematiklehrpersonen den Fragebogen (siehe Instrumente) ausfüllen lassen.Der Fragebogen umfasst Skalen zu Persönlichkeitsmerkmalen (Selbstwirksamkeit) und auch einige Angaben zum Schwerpunktfach, zum vorherigen Mathematikunterricht und eine Frage zur Motivation.
- Die Lehrpersonen haben dann den ersten Teil der Lernumgebung zu binomischen Formeln im Unterricht durchgeführt.
- In den Kalenderwochen 36 und 37, 2011, hat der Autor während 30-45 Minuten die Lernumgebung zur 1x1 Tafel durchgeführt und mit Kommentaren zurückgegeben. Diese Lernumgebung wurde nicht ausgewertet - die Klassen wurden aber gegen Ende unruhig. Klar war damit, dass der Einsatz der auszuwertenden Lernumgebung nicht zu viel Zeit in Anspruch nehmen durfte.

  In der 3.FMS hatte der Lehrer den Eindruck, dass seine Klasse die Sache ohne Bewertung nicht engagiert angehen würde. Wir haben uns deshalb dazu entschlossen, die Lernumgebung zu bewerten. Punkte gab es für eine vollständige Auflistung der ersten Treppenzahldarstellungen, für jede Hypothese, deren Herleitung und Begründung. Die Bewertung ist allerdings nicht in die Auswertungen in der vorliegenden Diplomarbeit eingeflossen.

- Die zweite Lernumgebung zu Treppenzahlen wurde in der Kalenderwoche 39, 2011, jeweils während 30 Minuten eingesetzt. Die Lernenden durften in Zweierteams arbeiten. Gerade in der dritten Klasse haben sich aber auch grössere Teams gebildet - wohl auch in der Hoffnung auf eine bessere Bewertung.
- Nun wurden 6 Personen für eine Videostudie ausgewählt. Am Abend nach dem Einsatz hat der Autor kurz die Lernumgebungen angeschaut und aus jeder Klasse zwei Personen mit interessanten Lösungen ausgewählt, die ausserdem noch ein breites Spektrum bei den Persönlichkeitsmerkmalen aufwiesen. Es wurden Schülerinnen und Schüler mit dem Schwerpunkt Pädagogik genommen - so besteht eventuell die Möglichkeit, den Personen in einigen Jahren an der Pädagogischen Hochschule wieder zu begegnen und weitere Interviews zu führen.
- Die Interviews wurden am Tag nach dem Einsatz der Lernumgebung durchgeführt und dauerten je 15 Minuten. Ziel der Interviews war, die Arbeitsweise der Schülerinnen und Schüler zu erfragen und ausgehend von den erfolgten Bearbeitungen weitere Hypothesen zu erarbeiten. Schwerpunkt war dabei die Frage, ob "grosse" Zahlen eine Treppenzahldarstellung mit vorgegebener Stufenanzahl besitzen: beispielsweise ob die Zahl 42 eine Darstellung mit 3 Stufen oder eine Darstellung mit 4 Stufen besitzt. Dies ist die Umkehrfrage zur häufig formulierten Hypothese, dass die Treppenzahldarstellungen mit Stufenanzahl 3 jeweils im Abstand 3 zueinander auftreten: 1+2+3=6, 2+3+4=9 usw.
  So können Thesen aus der empirischen Auswertung der schriftlichen Arbeiten belegt oder widerlegt werden. Es kann mehr über erfolgreiche Experimentierstrategien ausgesagt werden.

4.2 Instrumente

4.2.1 Die Lernumgebungen

Diese werden weiter oben beschrieben und im Anhang aufgeführt.

4.2.2 Fragebogen

Im Anhang 3 wird der Fragebogen aufgeführt.

Ziel des Fragebogens ist, allgemeine Merkmale der Schülerinnen und Schüler zu erfassen und zu erkunden, ob sich Zusammenhänge mit den Vorgehensweisen beim Experimentieren finden lassen.

Die erste Seite des Fragebogens bezieht sich noch nicht spezifisch auf die Mathematik.

Zunächst wird nach dem gewählten Schwerpunkt gefragt.

Die Fragengruppe 2 wurde aus Satow (1999) entnommen. Diese Skala erfasst die allgemeine Selbstwirksamkeitsüberzeugung.

Bei der Fragengruppe 3 handelt es sich um eine Skala aus PISA 2000 (Kunter, 2002) zur schulischen Selbstwirksamkeitsüberzeugung.

Die Fragen 4 bis 6 sind eigene Fragen.

Frage 4 erfasst den Einsatz des mathbu.ch (ein in den Sekundarschulen, aus denen die Schülerinnen und Schüler stammen, obligatorisches Lehrmittel, das sich am Projekt mathe 2000 und damit am Zahlenbuch orientiert.)

Frage 5 erfragt, ob die Schülerinnen und Schüler erwarten, Mathematik im späteren Leben einsetzten zu müssen.

Frage 6 erfasst die Motivation im Mathematikunterricht. Hierbei wurde keine bekannte Skala verwendet. Im Nachhinein ist dies zu bedauern. Die quantitativen Ergebnisse deuten zumindest an, dass die Motivation eine grössere Rolle spielt als die Selbswirksamkeitsüberzeugungen.

Die Fragengruppen 7 und 8 sind Skalen aus Pisa 2003 (Ramm 2006), die die mathematische und mathematikaufgabenbezogene Selbstwirksamkeitsüberzeugung erfragen.

4.3 Passung des Kategoriensystems von Leuders, Naccarella, Philipp

4.3.1 Codehäufigkeiten und Beispiele

Ein wichtiger Teil der vorliegenden Arbeit ist es, das Kategoriensystem von Leuders et al (2011), das im letzten Kapitel beschrieben wurde, auf die Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler anzuwenden. Während Leuders et al sowohl mit Primarschülerinnen und Primarschülern als auch mit Studierenden Interviews geführt haben, wurden hier schriftliche Arbeiten von ca. 16-20 jährigen Jugendlichen ausgewertet. Insofern stellt diese Untersuchung einen echten Test des Kategoriensystems dar.

Mit Hilfe des Softwarepakets MAXQDA wurden alle Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler erfasst und in den PDF-Dokumenten die Stellen codiert, die den verschiedenen Kategorien von Leuders et al (2011) zuzuordnen waren. Um die Bearbeitungen vollständig zu codieren, musste nur ein einziger Code hinzugefügt werden:

"Aufgabe verstehen".

Einige Schülerinnen und Schüler befassten sich mit der Frage, ob Dezimalzahlen erlaubt sind, ebenso negative Zahlen. Die Frage nach Stufenhöhe 1 trat auf - eine Schülerin hat ihre Lösungen dann auch auf die verschiedenen möglichen Antworten bezogen.

Dieser Code passt gut zu Polyas Flyer zur Heuristik des Problemlösens (Polya, 1949) und auch zur Arbeit von Haverty et al (2000), in der Analyse eine grosse Rolle spielt, insbesondere bei professionellen Problemlöserinnen und -lösern.

Es folgt eine Tabelle mit den Codehäufigkeieten:

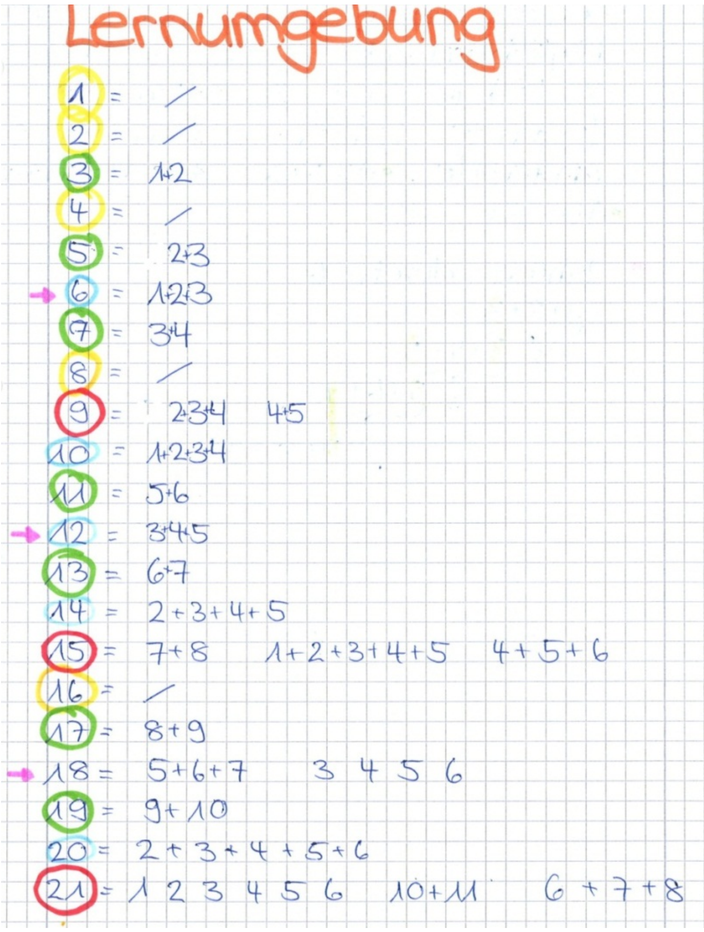
Code	Alle Codings	Dokumente
Beispielorientierte Hypothese	123	53
Reihenfolgebeispiel	89	44
Bestätigungsbeispiel	48	28
Gruppenbildung	43	23
Beispiel generieren	33	23
Folgehypothese	30	18
Hypothese formulieren	25	16
Begründung	16	11
Aufgabe reflektieren	11	5
Gegenbeispiel	11	7
Spezifizierungshypothese	10	9
Hypothese verwerfen	6	6
Umgebungsbeispiel	4	4
Vollständigkeitssuche	4	3
Grosses Beispiel	2	2
Kleinstes Beispiel	2	1
Struktursuche	2	2
Antworthypothese	1	1
Beispiele sortieren	1	1
Stellvertreterbeispiel	1	1
Besonderes Beispiel	0	0
Eigenschaften identifizieren	0	0
Ad-hoc-Hypothese	0	0
Allgemeines Beispiel	0	0

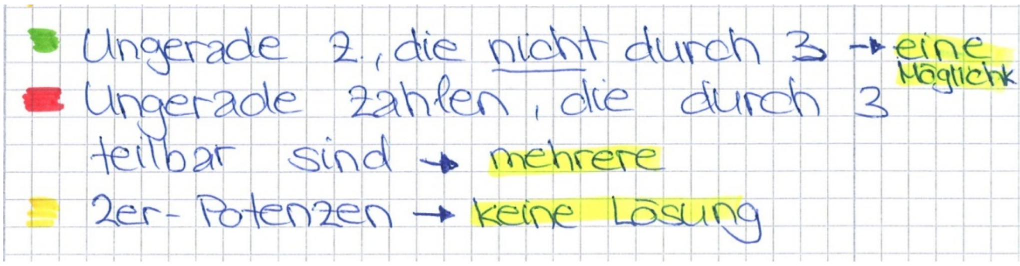
Diese Codes werden im Weiteren kursiv gesetzt.

Es zeigt sich, dass tatsächlich die Haupttätigkeit der Schülerinnen und Schüler aus dem Generieren, Strukturieren und Einordnen der Beispiele bestand.

In der Analyse der schriftlichen Bearbeitungen in dieser Arbeit ist der zeitliche Ablauf der Bearbeitung kaum zugänglich. Dies stellt einen Unterschied zur Arbeit von Leuders et al (2011) dar und wirkt sich bei der Codierung aus:

Im Interview lässt sich das Bilden der Beispiele und das Finden einer Strategie unterscheiden. Bei der schriftlichen Arbeit ist dies nicht möglich. Ein Beispiel:





Klar erkennbar ist das Reihenfolgebeispiel. Durch die farbigen Markierungen wird eine Gruppenbildung erreicht, die dann in Hypothesen (Ungerade Z. …) formuliert wird. An welchem Punkt der Bearbeitung die Hypothesen entstanden und ob zu dem Zeitpunkt weitere farbliche Markierungen als *Bestätigungsbeispiel* angefertigt wurden, ist nicht feststellbar. Erkennbar ist aber, dass sowohl im Beispielraum, im Strategieraum als auch im Hypothesenraum gearbeitet wurde. Eine weitere typische Vorgehensweise war: Es wurden aufeinanderfolgende Beispiele mit vorgegebener Stufenanzahl (*Gruppenbildung*) aufgeschrieben. (Bsp. 3+4+5, 4+5+6, 5+6+7). Zugrunde liegt eine Strategie (*Gruppenbildung*), aufgeschrieben wurde nur das *Reihenfolgebeispiel*. Bei der Codierung wurden in diesen Zusammenhängen zwei Codes vergeben: *Reihenfolgebeispiel*/*Gruppenbildung*. Auf den Code *Beispiele sortieren*wurde deshalb verzichtet: zur Unterscheidung von *Gruppenbildung* wäre der zeitliche Ablauf wichtig. Ebenso lässt sich *Hypothese formulieren* nicht von *Ad-hoc-Hypothese* unterscheiden.

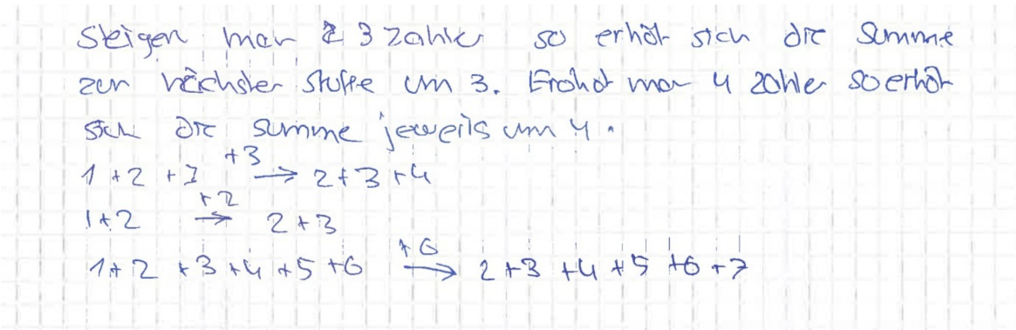
Allgemeines Beispiel wurde nicht gewählt, *Eigenschaften identifizieren* ist bei Treppenzahlen wenig notwendig.

Struktursuche ist wieder eher bei mündlichen Bearbeitungen beobachtbar. *Gegenbeispiel*e wurden nur wenige aufgeschrieben: dies kann der Kultur an vielen Schulen, nichts "Falsches" zu notieren, geschuldet sein. Zusammenfassend lässt sich sagen:

> Mit der Ergänzung *Aufgabe verstehen* lässt sich das Kategoriensystem von Leuders et al (2011) für schriftliche Bearbeitungen übernehmen und erfasst Strategien bei den Schülerinnen und Schülern der Fachmittelschule vollständig. Zu berücksichtigen ist, dass sich bei schriftlichen Bearbeitungen der zeitliche Ablauf der Entstehung nicht nachvollziehen lässt. Der Wechsel zwischen den 3 Räumen lässt sich gut dokumentieren, der typische Ablauf ist: *Beispiele generieren*, oft als *Reihenfolgebeispiel* (Beispielraum) -> *Gruppenbildung* (Strategieraum)-> *beispielorientierte Hypothese* (Hypothesenraum) -> *Bestätigungsbeispiel* (Strategieraum)

Die Relevanz des 3-Räume-Modells von Leuders et al (2011) ist also klar erkennbar.

Zur Verdeutlichung folgt ein weiterer Auszug aus einer Bearbeitung: Es beginnt mit einer Hypothese mit *Bestätigungsbeispiel* zu Stufenanzahl 3. Dann folgen Beispiele, die immanent weitere Hypothesen zu Stufenanzahl 2 und 6 enthalten - die Verallgemeinerung wird nicht notiert.


Steigen man 3 Zahle so erhöht sich die Summe zur nächster Stufe um 3. Erhöht man 4 Zahle so erhöht sich die Summe jeweils um 4.

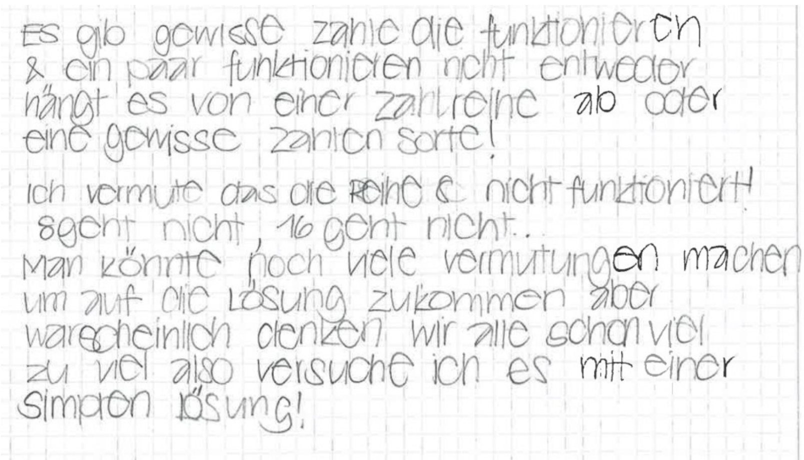
$1+2+3 \xrightarrow{+3} 2+3+4$

$1+2 \xrightarrow{+2} 2+3$

$1+2+3+4+5+6 \xrightarrow{+6} 2+3+4+5+6+7$

Im Prinzip ist die Idee, dass bei Stufenanzahl *n* jeweils eine Erhöhung um *n* stattfindet, bereits gegeben. Das wurde aber nicht explizit formuliert. Potenziell war diese Person erfolgreich bei der Bearbeitung der Aufgabe. Sie wurde interviewt, dies wird weiter unten im Abschnitt "Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren" untersucht.

Eine Arbeit stach heraus, da keinerlei Beispiele angefertigt wurden und auch keine Hypothesen explizit formuliert wurden. Dies wird ebenfalls im Abschnitt "Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren" als Gegenbeispiel weiter analysiert:


Es gib gewisse Zahle die funktionieren & ein paar funktionieren nicht entweder hängt es von einer Zahlreihe ab oder eine gewisse Zahlen Sorte!

Ich vermute das die Reihe 8 nicht funktioniert!
8 geht nicht, 16 geht nicht..
Man könnte noch viele Vermutungen machen um auf die Lösung zukommen aber warscheinlich denken wir alle schon viel zu viel also versuche ich es mit einer simplen Lösung!

4.3.2 Vereinfachung des Kategoriensystems von Leuders et al (2011) - erste quantitative Auswertungen

Haverty et al (2000) sprechen von drei zentralen Aspekten des experimentellen Arbeitens:

Data Gathering (Datensammlung), Pattern Finding (Finden von Mustern) und Hypothesis Generation (Hypothesenbildung). Das lässt sich beinahe direkt in die 3 Räume von Leuders et al (2011) übersetzen: Beispielraum, Strategieraum, Hypothesenraum. Zu beachten ist, dass das Prüfen von Hypothesen, das bei Leuders et al im Strategieraum verortet ist, bei Haverty et al nicht erwähnt wird.

Angesichts der guten Passung des Materials und des Konzepts von Leuders et al bietet sich an, die Daten auch quantitativ zu untersuchen. Immerhin liegen Daten von 62 Schülerinnen und Schülern vor.

Dies kann zur Beantwortung der Forschungsfragen dieser Diplomrbeit beitragen:

- Lassen sich Verbindungen zwischen Persönlichkeitsmerkmalen von Schülerinnen und Schülern und dem Verhalten beim experimentellen Arbeiten in der Mathematik finden?
- Welche Erfolgsbedingungen für experimentelles Arbeiten gibt es?

Um dies zu erreichen, wurden die Arbeiten mit Hilfe des Softwarepakets SPSS und den folgenden Variablen analysiert:

- *Ges.Bsp.* : Gesamtzahl der Beispiele (Beispielraum)
- *Sort. Bsp.*: Anzahl der Beispiel, die einer Gruppierung folgen (Strategieraum). Hier wurde erwogen, stattdessen die Anzahl der verschiedenen Gruppierungen zu verwenden. Dies korreliert mit einerm Korrelationskoeffizienten von 0.969. Es spielt keine Rolle, welche Variable genommen wird.
- Hyp. mit Gew.: Gewichtete Zahl der Hypothesen

Für die letzte Variable wurden die hauptsächlich vorkommenden relevanten Hypothesen identifiziert:

1. Multiplikation mit 2 liefert ausgehend von der letzten Nicht-Treppenzahl wieder keine Treppenzahl
2. Zweierpotenzen sind keine Treppenzahlen (Präzisierung der ersten Hypothese)
3. Durch 3 teilbare Zahlen lassen sich als Dreiertreppen darstellen.
4. Die erste Dreiertreppenzahl ist 6 (Präzisierung der dritten Hypothese)
5. Jede vierte Zahl ist eine Vierertreppenzahl
6. Die erste Vierertreppenzahl ist 10. (Präzisierung der fünften Hypothese)
7. Durch 5 teilbare Zahlen lassen sich als Fünfertreppen darstellen.
8. Die erste Fünfertreppenzahl ist 15. (Präzisierung der siebten Hypothese)
9. Treppen mit $2n$-1 Stufen führen auf eine Zahl der Form $m(2n+1)$
10. Treppen mit $2n$ Stufen führen auf eine Zahl der Form $2nm+2$
11. Die mit 1 beginnenden Treppen sind die Dreieckszahlen

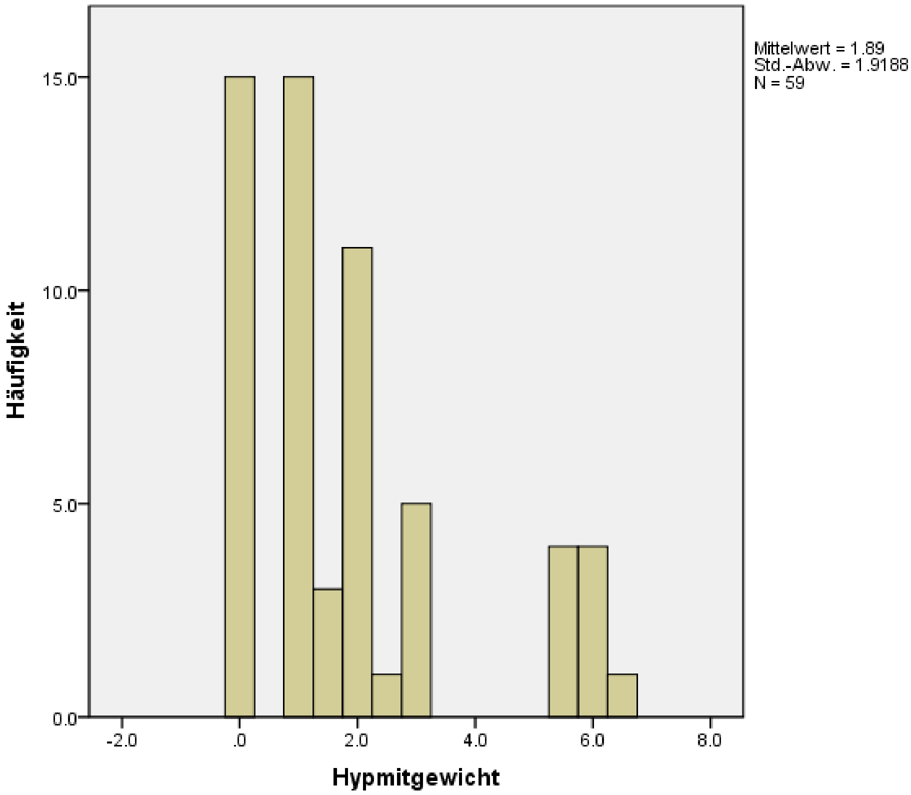
Insbesondere bei den Punkten 9 bis 11 geht es um die Ideen, nicht um die exakte Formulierung.

Es gab einige weitere Hypothesen, die aber für eine weitere Betrachtung der Treppenzahlen nicht wirklich relevant waren. Sie wurden deshalb hier nicht aufgenommen. Die Anzahl spielt keine grosse Rolle, würde es aber verhindern, Hypothesenbildung und erfolgreiche Bearbeitung synonym zu verwenden - was in diesem Zusammenhang, wie weiter oben erwähnt, sinnvoll erscheint.

Gewichtet wurde dann mit der Formel
Nr.1+0.5*Nr.2+Nr.3+0.5*Nr.4+Nr.5+0.5*Nr.6+Nr.7+0.5Nr.8+2*Nr.9+2*Nr.10+Nr.11

Die halben in der Gewichtung reflektieren den Zusammenhang mit der vorhergehenden Hypothese, die Faktoren 2 Gewichten die Allgemeinheit der entsprechenden Hypothesen.

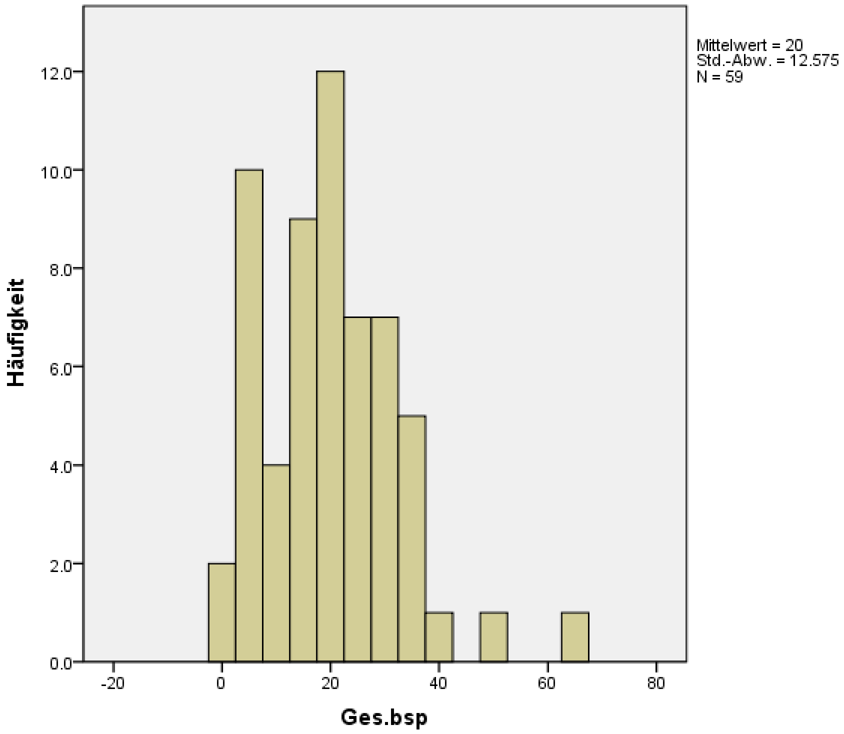
Folgendermassen verteilt sich die gewichtete Zahl der Hypothesen:



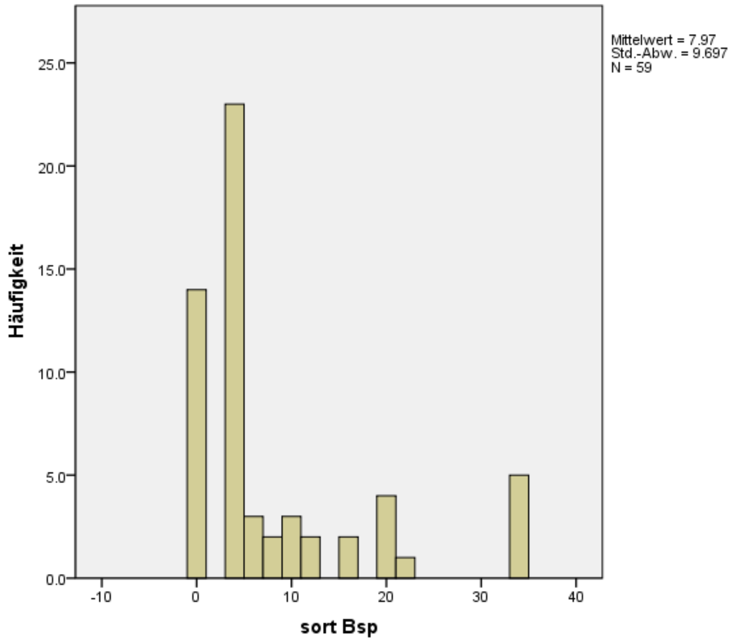
Dieser Graphik ist bereits anzusehen, dass ein rechter Teil der Schülerinnen und Schüler nicht viel Aufwand in die Bearbeitung der Aufgaben gesteckt hat. Im nächsten Abschnitt findet sich eine Untersuchung, inwiefern die Benotung in der dritten Klasse den Erfolg beeinflusst hat.

Die Graphik zeigt auch , dass eine kleine Gruppe erfolgreicher Probanden mit 5.5 und mehr Punkten besonders erfolgreich war. Diese Gruppe wird weiter unten intensiver qualitativ untersucht. Von diesen Probanden liegen zum Teil Interviews vor.

Es folgen die Darstellungen von "Gesamtbeispiele" und "sortierte Beispiele"



Ein grosser Teil der Lernenden hat zwischen 18 und 40 Beispielen generiert. Das scheint auf eine intensive Bearbeitung hinzudeuten. Die Person mit mehr als 60 Beispielen wird noch gesondert untersucht - auch hier liegt ein Interview vor.



Typisch sind hier Gruppierungen für Zweiertreppen und Dreiertreppen, wobei Dreierteppen noch häufiger sind. Es stellt sich die Frage, ob erfolgreiche Hypothesenbildner viele sortierte Beispiele brauchen.

4.4 Quantitative Auswertung des Fragebogens und der Bearbeitung der Lernumgebung

Die statistischen Untersuchungen dieses Abschnitts, wie auch die Graphiken im letzten Abschnitt, wurden mit dem Softwarepaket SPSS erstellt.

4.4.1 Auswertung des Fragebogens - Persönlichkeitsmerkmale

Zunächst wird untersucht, inwieweit die Persönlichkeitsmerkmale miteinander zusammenhängen. (Aufgenommen sind alle *n*=57 ausgefüllten Fragebogen)

Dabei ist die Variable *Allg. Selbstw.* die Summe der Fragen zur allgemeinen Selbstwirksamkeit (Frageblock 2 des Fragebogens, siehe Anhang 3), analog *Schul. Selbstw.* für die schulische Selbstwirksamkeit (Frageblock 4) , *Math. Selbstw.* zur mathematischen Selbstwirkamkeit (Frageblock 7) und *M. Aufg. Selbstw.* die Summe der Einschätzungen, wie gut Aufgaben gelöst werden können (Frageblock 8).

Korrelationen

		Allg. Selbstw.	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg. Selbstw.*
Allg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	1	.489**	.349**	.249
	Signifikanz (2-seitig)		.000	.008	.062
Schul. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	.489**	1	.569**	.385**
	Signifikanz (2-seitig)	.000		.000	.003
Math. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	.349**	.569**	1	.435**
	Signifikanz (2-seitig)	.008	.000		.001
M. Aufg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	.249	.385**	.435**	1
	Signifikanz (2-seitig)	.062	.003	.001	

**. Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,01 (2-seitig) signifikant.

Es treten oft hohe Korrelationen auf. Dies ist bei der Interpretation der weiteren Daten zu berücksichtigen.

4.4.2 Auswertung des Fragebogens - Persönlichkeitsmerkmale vs. Klasse, Einsatz des mathbu.ch und erwarteter Wichtigkeit der Mathematik nach der Schule

Die folgende Tabelle zeigt auf, wie die verschiedenen Persönlichkeitsmerkmale mit der Klasse zusammenhängen, nämlich gar nicht. Die Motivation wurde als weiteres Persönlichkeitsmerkmal aufgenommen. (Diese Variable beruht nur auf einer Frage, nämlich wie gross die Motivation in Mathematik ist). Interessanterweise, das zeigen die letzten beiden Spalten, ist auch kein Zusammenhang mit dem Einsatz des mathbu.ch (einem sich an konstruktivistischen Prinzipien orientierendem Lehrmittel) und der Antwort auf die Frage, ob Mathematik später gebraucht wird, festzustellen.

Korrelationen		Klasse	mathbu.ch	Math. brauchen
Klasse	Korrelation nach Pearson	1	-.154	-.066
	Signifikanz (2-seitig)		.274	.625
	N	62	52	57
Allg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.011	.076	.052
	Signifikanz (2-seitig)	.935	.592	.698
	N	57	52	57
Schul. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.149	-.141	.011
	Signifikanz (2-seitig)	.267	.319	.934
	N	57	52	57
Math. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.121	.072	-.090
	Signifikanz (2-seitig)	.369	.613	.507
	N	57	52	57
M. Aufg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.021	-.011	-.027
	Signifikanz (2-seitig)	.874	.940	.841
	N	57	52	57
Motiv. Math.	Korrelation nach Pearson	-.092	.129	.247
	Signifikanz (2-seitig)	.498	.361	.064
	N	57	52	57

Dass kein Zusammenhang der Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und der Motivation mit dem mathbu.ch besteht, verdient eine besondere Erwähnung. Eine möglich Erklärung ist, dass das Buch nicht von Lehrpersonen mit konstruktivistischen Beliefs (Coactiv, Baumert und Kunter, 2010) eingesetzt wird. Das Lehrmittel muss verpflichtend von allen Lehrpersonen eingesetzt werden - die Erhebung zeigt jedoch, dass dies nicht überall geschieht.

Weiter ist bemerkenswert, dass keine Korrelation zwischen der Klassenstufe und der Selbstwirksamkeitsüberzeugung bei Matheaufgaben besteht. Während der Ausbildung an der FMS steigt die Erwartung nicht, Aufgaben lösen zu können, die am Ende der 9. Klasse lösbar sein sollten - und voraussichtlich sowohl für den Beruf, den Alltag und die weitere Ausbildung relevant sind.

Der Fragebogen gibt Anlass, das Lehrmittel, zumindest dessen Einsatz, und den Wissenszuwachs an der FMS kritisch zu hinterfragen. Dies ist aber nicht Thema dieser Studie. Der Fokus liegt auf der Untersuchung von Bedingungen experimentellen Verhaltens von Schülerinnen und Schülern.

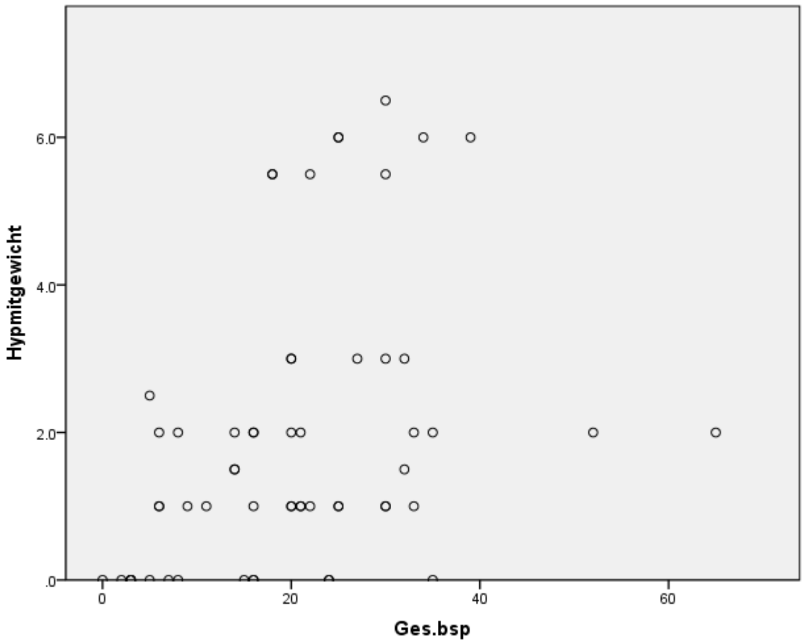
4.4.3 Auswertung der Bearbeitung der Lernumgebung - quantitative Erfassung von Hypothesenraum, Beispielraum und Strategieraum

Das Kategoriensystem von Leuders, Nacarella, Philipp (2011) wurde im Abschnitt "Vereinfachtes Kategoriensystem…" vereinfacht und auf ihr 3-Räume-Modell angepasst, so dass das 3-Räume-Modell nun quantitativ ausgewertet werden kann.

Für den Hypothesenraum gibt es also das Kriterium *Hyp. mit Gew.*, für den Stategieraum *Sort. Bsp.* und für den Beispelraum *Ges.Bsp.* .

Zu beachten ist, dass ein enger Zusammenhang zwischen Strategieraum und Hypothesenraum existiert: Wer die 3er Treppen systematisch aufschreibt findet schnell eine Hypothese - und wer eine Hypothese entwickelt hat, bildet noch einige Beispiele.

Interessant ist an dieser Stelle die folgende Graphik:



Diese Graphik zeigt, dass die erfolgreichen Hypothesenbilder (5.5 und mehr) zwischen 18 und 39 Beispielen erstellen. Diese Personen verteilen sich auf drei Abeitsgruppen, die jeweils zusammen gearbeitet haben. Zu zwei der Personen liegt kein Fragebogen vor. Als Kategorie "Erfolgreiches Experimentieren" ist damit die statistische Datengrundlage recht dünn. Deshalb werden die Lernenden mit 3 und mehr bei *Hyp. mit Gew.* in die Kategorie des erfolgreichen Experimentierens mit aufgenommen.

Auch wenn die Erfolgsbedingung als 3 und mehr definiert wird, befindet sich die Zahl der Beispiele im Bereich von 18 bis 39. Es scheint sich ein optimaler Beispielbereich zu ergeben.

Die Person mit über 60 Beispielen hat versucht, Zusammenhänge mit binomischen Formeln aufzustellen. Dabei hat sie interessante Untersuchunten angestellt, die aber von der Variablen *Hyp. mit Gew.* nicht erfasst wurden. Haverty et al (2000) würden sie als nicht erfolgreich bezeichnen, da sie nicht zielgerichtet auf die Frage hin gearbeitet hat.

Die andere Person mit vielen Beispielen wurde von mir interviewt - die richtige Hypothese für ungerade und gerade Stufenzahlen war vorhanden - wurde aber nicht schriftlich notiert.

Im Abschnitt "Erfolgreiches Hypothesenbilden und Persönlichkeitsmerkmale" werden diese Fälle genauer betrachtet. Es handelt sich um die Schülerinnen und Schüler mit den laufenden Nummern 1_04, 1_09, 1_10, 3_11, 3_14 mit 3 *Hyp. mit Gew.* und die Nummern 2_10, 2_13, 3_01, 3_03, 3_04, 3_07, 3_09, 3_10, 3_12 mit 5.5 oder mehr bei der Variablen *Hyp. mit Gew.*.

Ausserdem werden 2_07 und 1_05 mit mehr als 40 Beispielen auch in der folgenden qualitativen Untersuchung intensiver beleuchtet.

4.4.4 Auswertung der 3 Räume bezogen auf die Klassenstufe

Die folgende Tabelle zeigt Zusammenhänge zwischen den drei Räumen.

Korrelationen

Korrelationen		*Ges.Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp. mit Gew.*
Ges.Bsp.	Korrelation nach Pearson	1	.558**	.388**
	Signifikanz (2-seitig)		.000	.002
	N	59	59	59
Sort. Bsp.	Korrelation nach Pearson	.558**	1	.636**
	Signifikanz (2-seitig)	.000		.000
	N	59	59	59
Hyp. mit Gew.	Korrelation nach Pearson	.388**	.636**	1
	Signifikanz (2-seitig)	.002	.000	
	N	59	59	59

**. Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,01 (2-seitig) signifikant.

Die drei Dimensionen hängen eng miteinander zusammen - der Zusammenhang zwischen den nicht benachbarten Räumen *Ges.Bsp.* und *Hyp. mit Gew.* ist noch am kleinsten.

Trotzdem widerspricht dies den Befunden von Haverty et al (2000): Erfolgreiche Bearbeitung und Zahl der Beispiele korrelieren.

Wichtig ist weiter die Beobachtung, dass sich die Schulklassen unterscheiden, insbesondere die Klassen 1 und 3.

	Klasse	N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Ges.Bsp.	3	18	23.33	6.843	1.613
	1	23	16.26	15.360	3.203
Sort. Bsp.	3	18	10.78	12.445	2.933
	1	23	5.74	6.982	1.456
Hyp. mit Gew.	3	18	3.306	2.1430	.5051
	1	23	1.000	1.0871	.2267

T-Test bei unabhängigen Stichproben Varianzen nicht gleich	T	df	Sig. (2-seitig)
Ges. Bsp.	1.972	31.917	.057
Sort. Bsp.	1.539	25.223	.136
Hyp. mit Gew.	4.164	23.792	.000

Dieser anscheinend deutliche, aber nur bei den Hypothesen hoch signifikante Unterschied erklärt sich am ehesten durch die Bewertung in der 3. Klasse.

Wird nun in der ersten Klasse der Ausreisser 1_05 mit 65 Gesamtbeispielen (*Ges. Bsp.*) ausgeschlossen, so ist ausserdem (alpha=0.003) der Unterschied bei *Ges. Bsp.* hoch signifikant.

Auch zwischen der 2. und 3. Klasse besteht ein signifikanter Unterschied bei den Hypothesen mit Gewicht.

	Klasse	N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Ges.Bsp.	3	18	23.33	6.843	1.613
	2	18	21.44	12.430	2.930
Sort. Bsp.	3	18	10.78	12.445	2.933
	2	18	8.00	9.368	2.208
Hyp. mit Gew.	3	18	3.306	2.1430	.5051
	2	18	1.611	1.7786	.4192

T-Test bei unabhängigen Stichproben, Varianzen nicht gleich.	T	df	Sig. (2-seitig)
Ges.Bsp.	.565	26.438	.577
Sort. Bsp.	.757	31.583	.455
Hyp. mit Gew.	2.581	32.884	.014

Vergleich von Klasse 2 und 1. Die beiden Klassen unterscheiden sich nicht signifikant, auch wenn die Mittelwerte in der Klasse 2 jeweils 30 bis 50 Prozent höher liegen.

	Klasse	N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Ges.Bsp.	2	18	21.44	12.430	2.930
	1	23	16.26	15.360	3.203
Sort. Bsp.	2	18	8.00	9.368	2.208
	1	23	5.74	6.982	1.456
Hyp. mit Gew.	2	18	1.611	1.7786	.4192
	1	23	1.000	1.0871	.2267

T-Test, unabh. Stichpr., Varianz nicht gleich	T	df	Sig. (2-seitig)
Ges. Bsp.	1.194	38.939	.240
Sort. Bsp.	.855	30.533	.399
Hyp. mit Gew.	1.282	26.635	.211

Die 3. Klasse war also signifikant erfolgreicher als die beiden anderen Klassen.

Im Weiteren wird untersucht, wie die Bearbeitungen, aufgeschlüsselt nach den drei Räumen, mit den in der Umfrage erhobenen Kenndaten zusammenhängen.

4.4.5 Auswertung der quantitativen Untersuchung der Lernumgebung vs. Persönlichkeitsmerkmale

Diese Tabelle fasst Korrelationen zwischen den in der Umfrage erhobenen Persönlichkeitsmerkmalen und den Bearbeitungen, aufgeschlüsselt nach den 3 Räumen, zusammen. Da, wie oben gesehen, die Klassenzugehörigkeit eine Rolle spielt, wird dies auch noch nach Klassen aufgeschlüsselt betrachtet.

Korrelationen		*Ges.Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp. mit Gew.*
Allg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.054	.049	.146
	Signifikanz (2-seitig)	.698	.726	.291
	N	54	54	54
Schul. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.036	.090	.091
	Signifikanz (2-seitig)	.797	.517	.511
	N	54	54	54
Math. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	.283*	.180	.233
	Signifikanz (2-seitig)	.038	.192	.090
	N	54	54	54
M. Aufg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	.067	.011	.126
	Signifikanz (2-seitig)	.632	.936	.365
	N	54	54	54
mathbu.ch	Korrelation nach Pearson	-.054	-.088	.026
	Signifikanz (2-seitig)	.708	.540	.854
	N	51	51	51
Math. brauchen	Korrelation nach Pearson	-.062	-.088	.079
	Signifikanz (2-seitig)	.656	.526	.571
	N	54	54	54
Motiv. Math.	Korrelation nach Pearson	-.161	-.013	.287*
	Signifikanz (2-seitig)	.244	.923	.036
	N	54	54	54

*. Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,05 (2-seitig) signifikant.

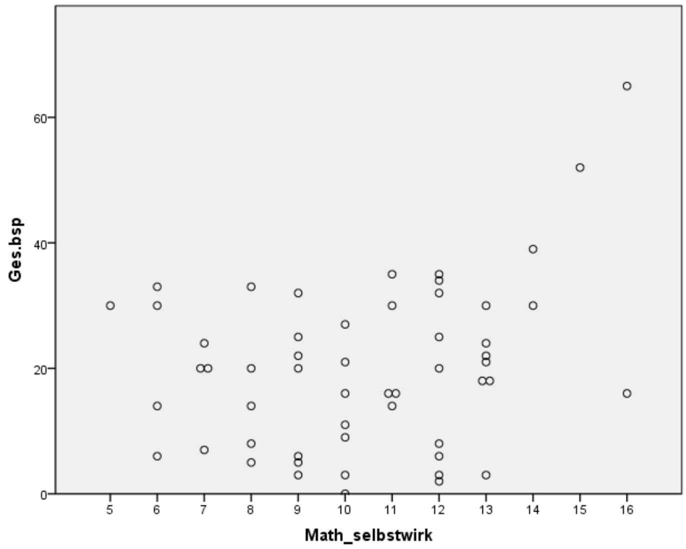
Signifikant, auf Niveau 0.05, sind einzig die Korrelationen *Math. Selbstw./ Ges. Bsp* und *Motiv. Math/ Hyp. mit Gew.*.

Werden nur die 39 Personen betrachtet, die mindestens eine Hypothese gebildet haben (sich also intensiver mit der Aufgabe beschäftigt haben), so liegen beide Korrelationen über 0.4 und sind hochsignifikant.

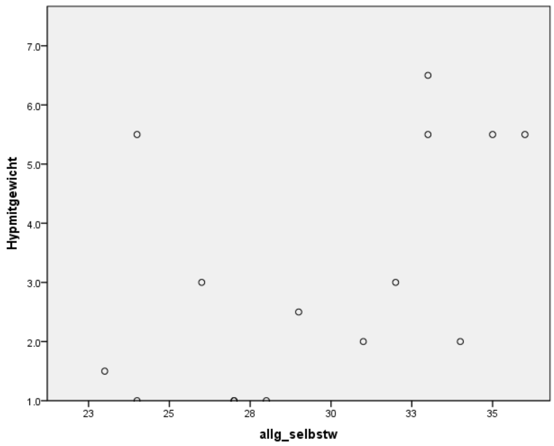
Werden ausserdem nur Personen betrachtet, die bei *Ges.Bsp.* mindestens 10 erreicht haben, so steigt die zweite Korrelation auf 0.542, hochsignifikant.

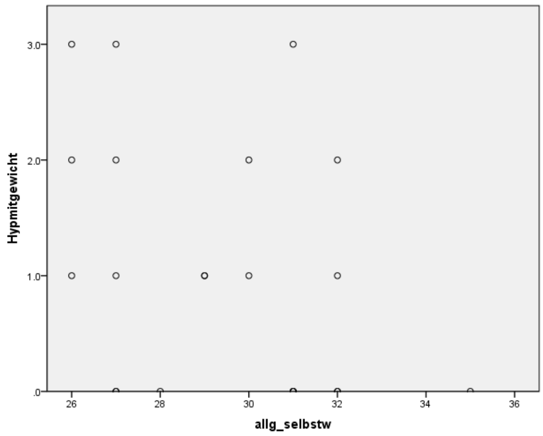
Es zeigt sich, dass die Betrachtung der Streudiagramme aufschlussreich ist. Zunächst *Math. Selbstw. - Ges. Bsp.*

Werden hier die beiden Ausreisser mit mehr als 50 Beispielen entfernt, so bleibt ein Korrelationskoeffizient von 0.076.



Bei der zweiten signifikanten Korrelation *Allg. Selbstw.* und *Hyp. mit Gew*. zeigen die Streudiagramme der verschiedenen Klassen deutlich verschiedene Bilder. Links die dritte Klasse, rechts die erste Klasse





In der dritten Klasse gibt es eine Gruppe von Personen mit hoher Selbstwirksamkeit, die dann auch hohe Hypothesenzahlen generiert haben. Die Person oben links hat in dieser Arbeitsgruppe mitgearbeitet.

In der ersten Klasse fehlt die erfolgreiche Gruppe, die in der dritten Klasse die Korrelation "erzeugt" hat. Die Person mit 35 Beispielen, ohne Hypothesen, hat die negative Korrelation zur Folge.

Die Korrelationen scheinen insgesamt durch Ausreisser geprägt zu sein, von Klasse zu Klasse verschieden. Das wird in der nächsten Tabelle näher dargestellt, die die Korrelationen nach Klasse aufschlüsselt.

In der Graphik sind mittlere bis hohe Korrelationen türkis, hohe Korrelationen gelb und signifikante Ergebnisse auch gelb markiert.

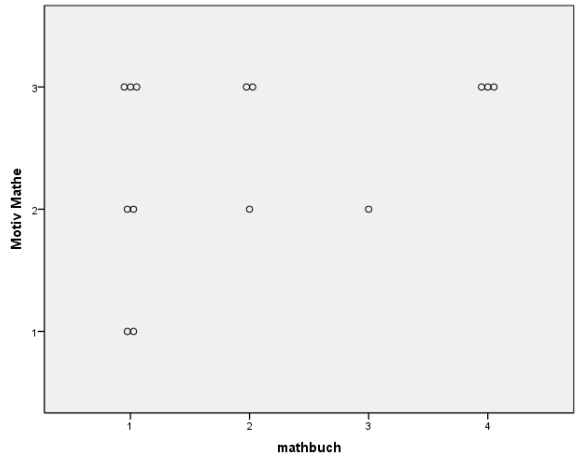
		3. Klasse			2. Klasse			1. Klasse		
Korrelationen		*Ges.Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp. mit Gew.*	*Ges.Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp. mit Gew.*	*Ges.Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp. mit Gew.*
Allg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.379	-.138	.538*	.336	.638**	.002	-.150	-.287	-.368
	Signifikanz (2-seitig)	.163	.623	.039	.203	.008	.995	.495	.184	.084
	N	15	15	15	16	16	16	23	23	23
Schul. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.100	-.022	.357	.365	.651**	.276	-.151	-.197	-.242
	Signifikanz (2-seitig)	.723	.939	.192	.164	.006	.300	.493	.369	.266
	N	15	15	15	16	16	16	23	23	23
Math. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.093	-.102	.396	.568*	.663**	.495	.266	-.003	-.105
	Signifikanz (2-seitig)	.743	.718	.144	.022	.005	.051	.220	.988	.632
	N	15	15	15	16	16	16	23	23	23
M. Aufg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.186	-.243	.226	.304	.491	.357	.083	-.051	.076
	Signifikanz (2-seitig)	.508	.383	.417	.253	.053	.175	.708	.818	.731
	N	15	15	15	16	16	16	23	23	23
Math-bu.ch	Korrelation nach Pearson	-.085	.157	.615*	-.178	-.135	.135	-.019	-.270	-.294
	Signifikanz (2-seitig)	.784	.609	.025	.509	.619	.617	.934	.225	.184
	N	13	13	13	16	16	16	22	22	22
Math brauch	Korrelation nach Pearson	.258	.000	.190	-.063	-.029	.423	-.176	-.249	.073
	Signifikanz (2-seitig)	.354	1.000	.497	.817	.914	.103	.421	.252	.741
	N	15	15	15	16	16	16	23	23	23
Motiv. Math.	Korrelation nach Pearson	.246	.326	.630*	.105	.166	.637**	-.400	-.421*	-.265
	Signifikanz (2-seitig)	.378	.236	.012	.699	.539	.008	.058	.045	.223
	N	15	15	15	16	16	16	23	23	23

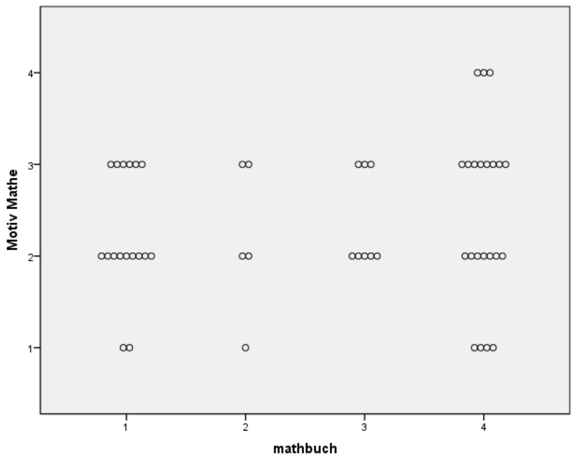
**. Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,01 (2-seitig) signifikant.

*. Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,05 (2-seitig) signifikant.

4.4.5.1 Korrelationen in der dritten Klasse

Auch bei den anderen signifikanten Korrelationen der 3. Klasse sind die "positiven Ausreisser" entscheidend. Da *Hyp. mit Gew.* sowohl mit *mathbu.ch* als auch mit *Motiv. Math.* korreliert, sollte noch die Beziehung *mathbu.ch* - *Motivation Mathematik* angeschaut werden. Die linke Graphik zeigt das Streudiagramm für die dritte Klasse, die rechte das Diagramm für alle Klassen.





Auffallend ist, dass es in der dritten Klassekeine Personen mit hohem Einsatz des mathbu.ch und niedriger Motivation in Mathematik gibt. Dieses Bild bestätigt sich nicht über alle Klassen hinweg. Unter der Gruppe, die das mathbu.ch viel einsetzt, gibt es eine grosse Streuung in der Motivation.

Zur Erinnerung: die Korrelation von mathbu.ch-Einsatz und Motivation liegt bei 0.13 und ist deutlich nicht signifikant.

Wichtig kann in diesem Zusammenhang sein, dass sich die Mittelwerte bei der Frage zum Einsatz des mathbu.ches unterscheiden: in der ersten Klasse 2.64, in der zweiten 3.31 und in der dritten 2.00. Im Kanton Baselland, in dem die Untersuchung durchgeführt wurde, ist der Einsatz des mathbu.ch erst seit kurzem verpflichtend. In der dritten Klasse wurde es von den Lehrpersonen freiwillig eingesetzt. Wenn postuliert wird, dass Personen, die das mathbu.ch freiwillig einsetzten, eher eine konstruktivistische Grundeinstellung haben, so könnte dies die moderierende Variable sein, denn konstruktive Überzeugungen korrelieren allgemein positiv (.32) mit dem Lernerfolg. (Kunter und Baumert 2011, Seite 248). Werden die Korrelationen berechnet, so zeigen sich zwar mittlere Korrelationskoeffizienten, aber keine signifikanten Ergebnisse

Korrelationen 3. Klasse		*mathbu.ch*
Allg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	.486
	Signifikanz (2-seitig)	.078
	N	14
Schul. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	.168
	Signifikanz (2-seitig)	.565
	N	14
Math. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	.000
	Signifikanz (2-seitig)	1.000
	N	14
M. Aufg. Selbstw.	Korrelation nach Pearson	-.200
	Signifikanz (2-seitig)	.492
	N	14
Motiv. Math.	Korrelation nach Pearson	.410
	Signifikanz (2-seitig)	.145
	N	14

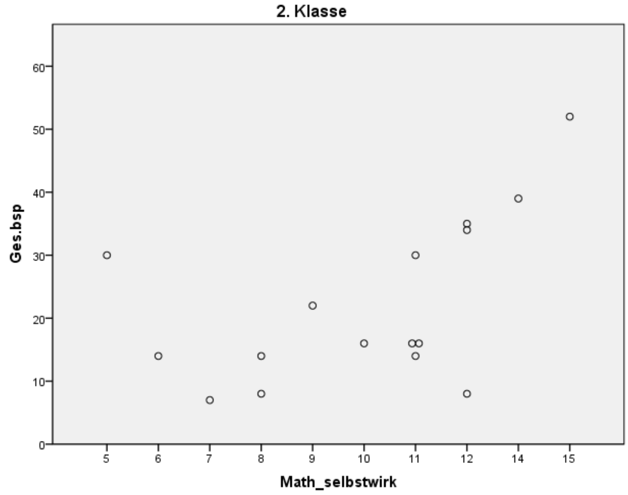
4.4.5.2 Korrelationen in der zweiten Klasse

In dieser Klasse zeigen sich die deutlichsten Korrelationen, teilweise hoch signifikant.

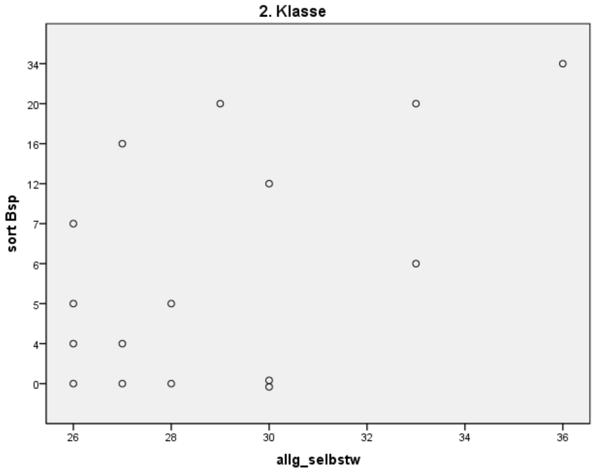
Die Zahl der Hypothesen korreliert hoch mit der Motivation in Mathematik, die Zahl der sortierten Beispiele korreliert mit allen Selbstwirksamkeitskategorien.

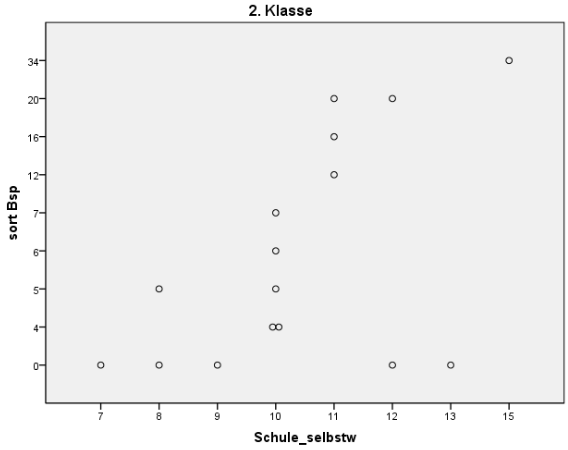
Ausserdem korreliert die mathematische Selbstwirksamkeit mit den 3 Kategorien, die die drei Räume darstellen. Es folgen Streudiagramme einiger Korrelationen.

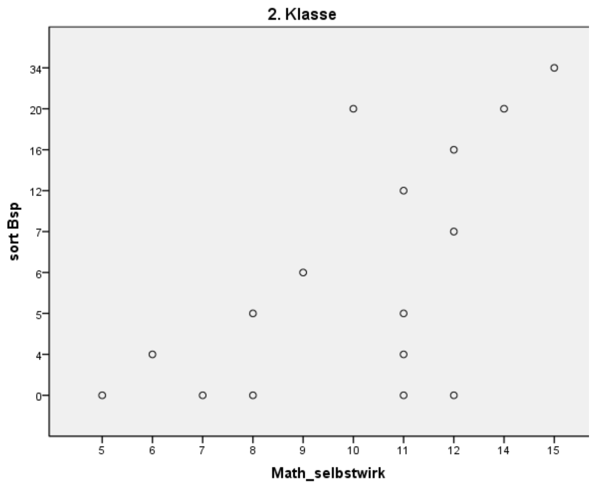
Zunächst der signifikante Zusammenhang zwischen *Math. Selbstw.* und *Ges.Bsp.* .

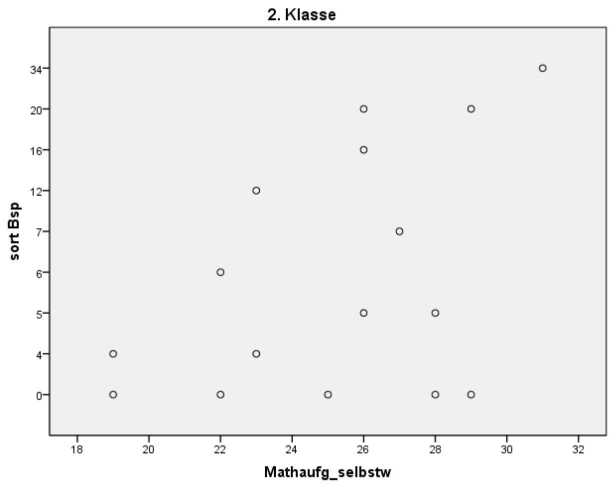


Es folgen Streuddiagramme mit *Sort. Bsp.*





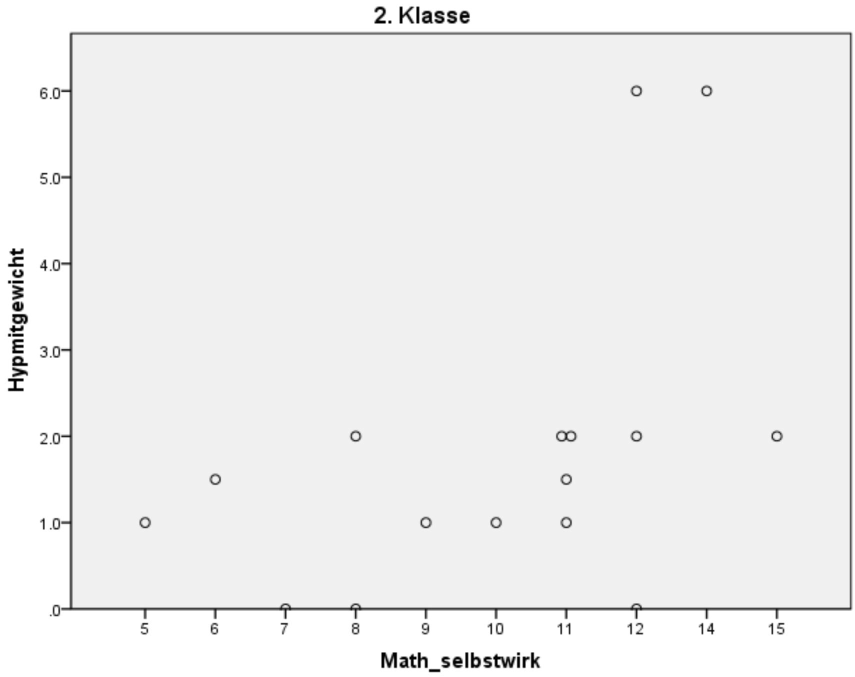




Bis auf *M. Aufg. Selbstw./ Sort. Bsp*. sind alle Zusammenhänge hoch signifikant. Wäre nur diese Klasse untersucht worden, so wäre ein deutlicher Zusammenhang zwischen Selbstwirksamkeit und den sortierten

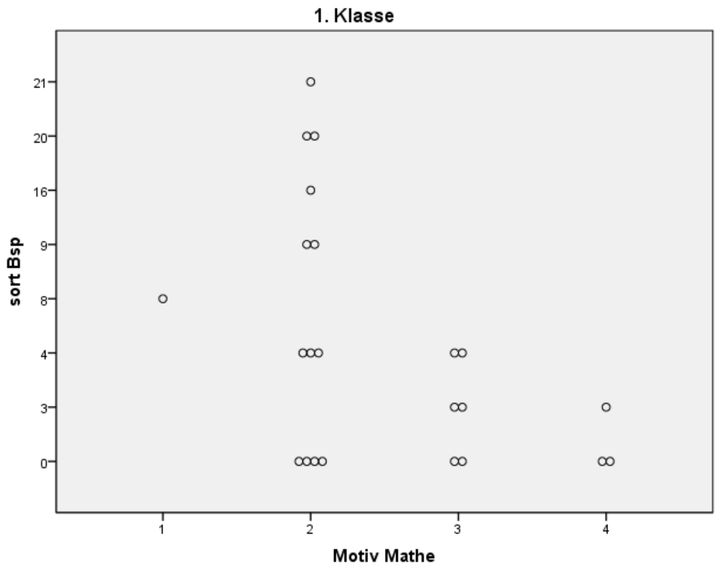
Beispielen - also dem Arbeiten im Strategieraum, vermutet worden.. Dieses Bild bestätigt sich allerdings in den beiden anderen Klassen nicht - in der 3. Klasse, die insgesamt erfolgreicher war, sind diese Korrelationen sogar negativ, was doch sehr überraschend ist.

Diese Graphik zeigt den Zusammenhang von *Math. Selbstw.* und *Hyp. mit Gew.* Mit alpha=0.051 ist die Korrelation knapp nicht signifikant - es ist allerdings wieder schön zu erkennen, dass positive Ausreisser die Korrelation erzeugen.



4.4.5.3 1. Klasse

Wird nur die erste Klasse untersucht, so ergibt sich eine leicht signifikante negative Korrelation zwischen der *Sort. Bsp.* und der *Motiv. Math.* Insgesamt sind alle Korrelationen zwischen der Motivation und den Variablen aus der schriftlichen Bearbeitung negativ. Weiter oben wurde aber gezeigt, dass die Klasse insgesamt wenig Beispiele und Hypothesen produziert hat. Nur 8 Personen haben mehr als eine Hypothese aufgestellt und ausserdem mehr als 9 Beispiele produziert. Die Aufgabe ist anscheinend insgesamt in der Klasse nicht gut angekommen.



Auch bei dieser erfolgreichen Gruppe sind aber die Korrelationen mit der Motivation negativ. Dieser Zusammenhang tritt in den anderen Klassen nicht auf.

4.4.6 Zusammenfassung und Interpretation

Die Modellierung der drei Räume zeigt eine Korrelation zwischen den Räumen, die aber nicht zu stark ist.

Es ist ein Widerspruch zu Haverty et al (2000) festzustellen, die keinen Zusammenhang zwischen "Data Gathering" und erfolgreicher Bearbeitung feststellen.

Die Untersuchung aus Haverty et al (2000) bezüglich des Zusammenhangs zwischen "Pattern Finding", "Hypothesis Generation" und erfolgreicher Bearbeitung kann hier leider nicht nachvollzogen werden, da das Finden von Hypothesen praktisch gleichbedeutend ist mit erfolgreicher Bearbeitung.

Es bleibt festzustellen, dass kein stabiler Zusammenhang zwischen den Persönlichkeitsmerkmalen und dem Experimentierverhalten besteht. In der zweiten Klasse ist ein starker Zusammenhang vorhanden, in der 3. immerhin ansatzweise.

In der dritten Klasse, in der die Lernumgebung benotet wurde, hat es intensiv zusammen arbeitende Gruppen gegeben. Auch wenn dabei, wie im Abschnitt "Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren" zumeist Personen mit ähnlichen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen zusammengearbeitet haben, kann das den Zusammenhang gestört haben.

Die erste Klasse wurde nur ein Vierteljahr vor der Untersuchung gebildet. Allfällige Beliefs der Lehrperson, die, wie COACTIV (Baumert und Kunter, 2010) gezeigt hat, einen Einfluss auf das Lernverhalten der Klasse haben, haben also noch keinen grossen Einfluss auf die Klasse.

Es kann vermutet werden, dass der Zusammenhang mit curricular bedeutsamer Mathematik von vielen nicht gesehen wurde - was dieBearbeitungstiefe verringert hat und auch den Zusammenhang mit mathematikbezogenen Überzeugungen aufgehoben hat.

In der zweiten Klasse unterrichtet nach der, subjektiven, Einschätzung des Autors eine Lehrperson mit konstruktivistischen Beliefs. Der Klasse könnte ein experimentelles Verhalten vertrauter sein. So könnte die Passung zwischen experimentellem Verhalten und Selbstwirksamkeit grösser sein. Mit der gebotenen Vorsicht lässt sich damit ein Resultat formulieren:

> Es gibt Klassen, in denen mittlere bis hohe Korrelationen zwischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und Aspekten des experimentellen Verhaltens feststellbar sind. Diese Korrelationen sind allerdings nicht stabil und können leicht von verschiedenen Einflussfaktoren überlagert werden.

In folgenden Untersuchungen muss also unbedingt das Verhalten der Lehrperson einbezogen werden: einerseits kann, auch nach den Untersuchungen von COACTIV (Baumert und Kunter, 2010), vermutet werden, dass das Verhalten der Lehrpersonen einen grossen Einfluss hat, andererseits zeigt sich in dieser Arbeit, im Abschnitt "Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren", dass eine Lernwegbegleitung wichtig ist.

Ein Zusammenhang mit dem Einsatz des mathbu.ch ist nur in der Klasse festzustellen, die am längsten ohne mathbu.ch arbeitete.

4.5 Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren

In diesem Abschnitt werden die Daten der erfolgreichen Teilnehmenden, sowie einer Person ohne Beispiele und einer Person mit extrem vielen Beispielen untersucht. Als besonders erfolgreich werden Personen mit 3 oder mehr Punkten bei *Hyp. mit Gew.* und deren Arbeitsgruppen eingestuft.

Die betrachteten Personen haben jeweils in Gruppen zusammengearbeitet. Diese Gruppen werden getrennt analysiert. Bei der Analyse wird ausgegangen von den Daten zur Selbstwirksamkeit und den Ergebnissen der Variablen zum 3-Räume Modell. Ausgehend von diesen Zahlen werden die schriftlichen Bearbeitungen, und, soweit vorhanden, die Interviews ausgewertet. Mit Hilfe des Kategoriensystems von Leuders et al (2011) werden die Strategien der jeweiligen Gruppe herausgearbeitet. Beim Übergang von der einen zur nächsten Arbeitsgruppe werden jeweils Unterschiede und Gemeinsamkeiten betont. Begonnen wird aber zunächst mit einer quantitativen Untersuchung der besonders erfolgreichen Gruppe.

4.5.1 Erfolgreiches Hypothesenbilden und Persönlichkeitsmerkmale

Verglichen werden die verschiedenen Variablen bei den Personen mit >=3 bei *Hyp. mit Gew.*.

Gruppenstatistiken

	Hyp. mit Gew.	N	Mittelwert	Stand,abw,
Ges.Bsp.	>= 3.0	14	26.43	6.406
	< 3.0	45	18.00	13.382
Sort. Bsp.	>= 3.0	14	17.50	12.177
	< 3.0	45	5.00	6.498
Allg Selbstw.	>= 3.0	12	29.92	3.942
	< 3.0	42	29.10	2.937
Schul. Selbstw.	>= 3.0	12	11.92	1.505
	< 3.0	42	11.05	2.284
Math. Selbstw.	>= 3.0	12	11.33	2.708
	< 3.0	42	10.07	2.626
M. Aufg. Selbstw. selbst	>= 3.0	12	25.83	3.857
	< 3.0	42	24.81	4.984
mathbu.ch	>= 3.0	11	2.45	1.508
	< 3.0	40	2.78	1.271
Math. brauchen	>= 3.0	12	2.33	.651
	< 3.0	42	2.26	.701
Motiv. Math.	>= 3.0	12	2.67	.492
	< 3.0	42	2.26	.828

Test bei unabhängigen Stichproben

	T-Test für die Mittelwertgleichheit		
	T	df	Sig. (2-seitig)
Ges.Bsp.	3.206	46.786	.002
Sort. Bsp.	3.681	15.370	.002
Allg. Selbstw.	.671	14.667	.513
Schul. Selbstw.	1.553	27.093	.132
Math. Selbstw.	1.433	17.370	.170
M. Aufg. Selbstw.	.757	22.617	.457
mathbu.ch	-.645	14.151	.529
Math. brauchen	.329	18.918	.746
Motiv. Math.	2.118	30.605	.042

Es zeigt sich, dass diese Gruppe hoch signifikant mehr Beispiele generiert. Auch ein schwach signifikantes Plus bei *Motiv. Math.* ist zu beobachten. Es gibt jedoch keinen Zusammenhang mit den Selbstwirksamkeitsüberzeugungen. Insbesondere bei diesen Personen kann dies aber an der Zusammenarbeit in Arbeitsgruppen liegen. Die Zusammenarbeit spielt bei der kleinen Stichprobengrösse eine grössere Rolle. In weiteren Untersuchungen sollte mit anderen Skalen geforscht werden, ob sich Persönlichkeitsmerkmale identifizieren lassen, die das Experimentieren begünstigen.

Erwähnenswert ist, dass bei den sieben Personen, die bei *Hyp. mit Gew.* 5 oder mehr erreicht haben, fünf dabei sind, die beim *mathbu.ch* eine 3 oder mehr angekreuzt haben (eine Person hat keine Angaben gemacht). Dies ist aber zu wenig für eine quantitative Analyse.

4.5.2 Erste *n* Zahlen - Dritte Klasse

Einfacher zu untersuchen sind dabei die Gruppen, die zu Anfang systematisch alle Beispiele für die ersten Treppenzahldarstellungen aufgeschrieben haben. Deshalb wurde mit einer Gruppe der dritten Klasse begonnen. Auffällig war dann, dass alle erfolgreichen Gruppen aus dieser Klasse mit vielen *Reihenfolgebeispielen* begonnen haben, wohingegen in der zweiten Klasse gleich Beispiele mit vorgegebener Stufenanzahl produziert wurden.

4.5.2.1 Die vier Arbeitsteilerinnen

Diese Gruppe besteht aus vier Personen, davon wurde 3_01 nachgängig interviewt. Aufgeschrieben haben alle ihre eigene Arbeit (es wurde ja einzeln bewertet), aber die Bearbeitungen sind sehr ähnlich, hat die Gruppe doch von Beginn an zusammen gearbeitet. Folgendermassen sehen die statistischen Daten der Gruppe aus:

Nr.	Kl.	Ges.	Profil	*Allg Selbstw.*	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg Selbstw.*	*Mathbu.ch*	*Motiv. Math.*	*Ges. Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp mit gewicht*
Mittel. alle				29.3	11.2	10.1	25.2	2.7	2.3	20.0	7.2	1.8
3_01	3	f	P	33	11	6	18	4	3	30	34	6.5
3_09	3	f	Keine Teilnahme an Umfrage							25	33	5.5
3_10	3	f	P	24	12	14	26	1	3	30	33	5.5
3_12	3	f	Keine Teilnahme an Umfrage							25	33	6

Interview mit 3_01

Es folgt ein geglättetes Transskript aus einem Teil des Interview mit 3_01. Der erste Teil zeigt die Notwendigkeit der Kategorie *Aufgabe verstehen*, dann folgen Aussagen zur Arbeitsteilung in der Gruppe.

> 3_01: Wir haben zuerst nicht begriffen, dass die Zahlen hintereinander sein müssen, haben gedacht, dass es auch 1, 2 und 4 sein können. Dann gäbe es ja unendlich viele Möglichkeiten.
>
> Dann haben wir das begriffen, wollten alle durchmachen bis 20 und haben dann gesehen, dass es bei 21 viele Möglichkeiten gibt. Dann nehmen wir noch 25 und 40 dazu. Das brauchten wir aber nicht mehr.
>
> (…)
>
> Ich habe mehr die Struktur gebracht, habe nicht mit dem Taschenrechner gearbeitet. Habe alles wiederholt. Habe eigentlich immer gesagt, wie wir es machen müssen. Also z. B. 'Jetzt probieren wir mal die 20 aus' und so. Die anderen haben das dann herausgefunden, haben es aufgeteilt, z. B. hat eine gesagt, ich nehme mal 1 bis 5. Sonst würde es ja ewig gehen. Ich habe dann alles aufgeschrieben und habe gesagt, wenn sie es von den anderen nicht gehört haben. Auf die Sachen sind wir gemeinsam gekommen. Die Auswertung habe ich dann gemacht, während sie noch bis 25 gerechnet haben.
>
> I: Die Sachen haben Sie dann auch herausgefunden?
>
> 3_01: Das haben wir schon zusammengemacht, das hier, was heruntergeht, habe ich herausgefunden, das weiss ich noch. Die anderen haben dann auch Zeug herausgefunden, das nicht so wichtig ist. Ich habe es dann formuliert, weil die anderen nicht so gut in Deutsch sind.

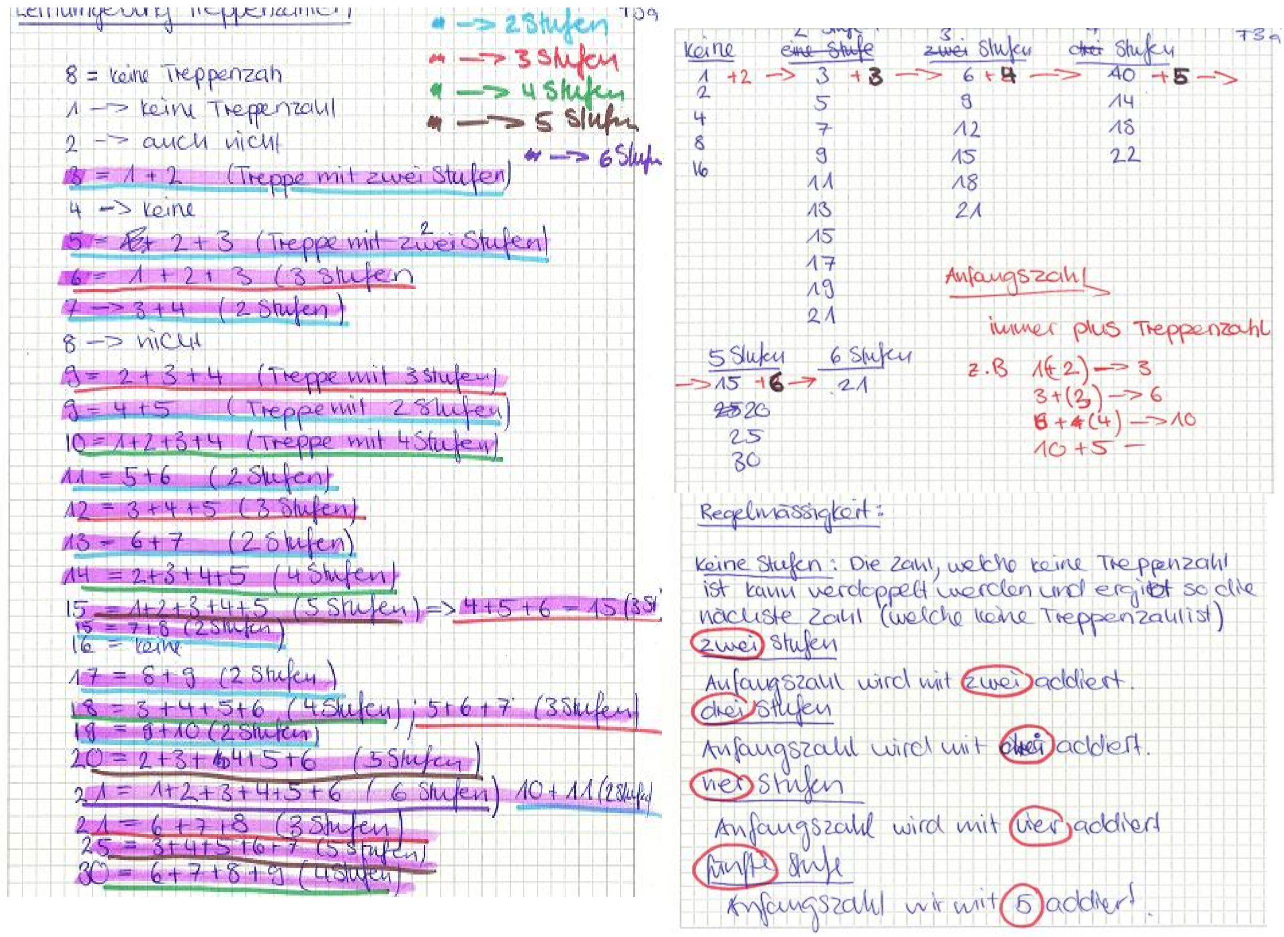
Die Gruppe zeichnet sich also durch eine intensive Arbeitsteilung aus. Koordinierend Protokoll führend fungierte dann interessanterweise eine Person, die eine hohe allgemeine Selbstwirksamkeitserwartung hat, aber sich in Mathematik eher unterdurchschnittlich einschätzt.

Sie erreicht eine gewisse Dominanz in der Gruppe, kann auch entscheiden, was wichtig genug zum Notieren ist. Vor der Bearbeitung der Lernumgebung fiel sie durch eine sehr kritische Haltung zur Bewertung auf. Sie sagt von sich, dass sie durch intensives Lernen eine gute Mathematiknote hat. Im Interview treten dann auch einige Schwächen in Mathematik auf: Sie glaubte, 240 habe genau die gleichen Teiler wie 24, verwechselte Wurzeln und Potenzen (von 2). Es ist ihr nicht klar geworden, dass es einen Unterschied bezüglich Teilbarkeit bei geraden und ungeraden Stufenanzahlen gibt.

Interessant war, dass sie im Interview verschiedene falsche Hypothesen produzierte, die sie dann selber widerlegte, zum Beispiel: Ist 22 eine Vierertreppe, dann auch die doppelte Zahl, also 44. Das deutet auf einen flexiblen Umgang mit ihren eigenen Ideen hin. Die Kategorien *Gegenbeispiel* und *Hypothese verwerfen* sind, wie erwartet, im Interview viel wichtiger als in schriftlichen Ausarbeitungen. Verworfene Hypothesen werden einfach nicht notiert.

Bearbeitungen:

Eingefügt hier die Bearbeitung von 3_10: nach einem anfänglichen *Reihenfolgebeispiel* wird dargestellt welche Zahlen welche Treppenzahldarstellungen besitzen (*Reihenfolgebeispiel*/*Gruppenbildung*). Die Regelmässigkeit wird dann auch formuliert (*Beispielorientierte Hypothese*).



Der Entstehungsweg lässt sich nur im Interview nachvollziehen. Auf der linken Seite befindet sich die Gruppe zunächst im Beispielraum - der sehr systematisch bearbeitet wird. Bei der farbigen Gruppierung befindet sich die Gruppe im Strategieraum. Die rechte Seite ist dann der Hypothesenraum, zunächst mit konkreten Zahlen formuliert, dann noch allgemein.

Erfolgsstrategie

- Arbeitsteilung. Eine Gruppenleitung kann helfen, die Arbeit zu strukturieren.
- Effektiv Datenbasis für spätere Untersuchungen anlegen.
- Kreativ Hypothesen bilden. Dabei durchaus alleine denken.
- Geordnet Ergebnisse zusammenfassen.

4.5.2.2 Gruppe mit einer Frage: Wie viele Treppenzahldarstellungen gibt es

Die Gruppe besteht aus 3_11, 3_14 und 3_02, wobei 3_02 interviewt wurde. Die statistischen Daten sehen folgendermassen aus:

Nr.r	Kl.	Ges.	Pro-fil	*Allg Selbstw.*	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg Selbstw.*	*Math-bu.ch*	*Motiv. Math.*	*Ges. Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp mit gewicht*
Mittel. alle				29.3	11.2	10.1	25.2	2.7	2.3	20.0	7.2	1.8
3_02	3	f	P	23	8	9	19	2	3	32	10	1.5
3_11	3	f	S	26	10	10	28	1	2	27	4	3
3_14	3	f	G	32	14	12	24	2	3	32	4	3

In den Selbstwirksamkeitserwartungen sind sie leicht unterdurchschnittlich, es ist kein klares Zugpferd dabei. Die Motivation in Mathematik ist leicht überdurchschnittlich.

Interview mit 3_02

Im Interview mit 3_02 wird die Teilbarkeit durch 3 bzw. 5 bei Stufenanzahl 3 bzw. 5 erarbeitet. Die Regelmässigkeit bei Stufenanzahl 4 wird nicht erkannt. Wichtig ist 3_02, was sie zuletzt herausgefunden hat: Sind die Zahlen in Treppen mit Stufenanzahl 3 aufgeteilt (1+2+3 und 4+5+6 und 7+8+9) so gibt die Summe jeweils 9 mehr. (*Beispielorientierte Hypothese* mit *Bestätigungsbeispiel*en).

Eine Begründung wird aber nicht gesucht. Bei den Summen 10+11+12 und 13+14+15 addiert 3_02 die drei Zahlen, anstatt die eigene Hypothese zu verwenden und einfach 9 zum letzten Ergebnis zu addieren.

Bearbeitungen

Diese Gruppe ist nicht so erfolgreich wie die vorige Gruppe (Arbeitsteilerinnen). Auch Sie hat mit einer systematischen Darstellung der ersten Zahlen begonnen, diese farbig gegliedert. (*Reihenfolgebeispiel/ Gruppenbildung*). Im Abschnitt "Codehäufigkeiten und Beispiele" ist die Bearbeitung von 3_11 aufgeführt. Dann aber wird nur untersucht, wie viele Bearbeitungen es gibt. Das Resultat, formuliert von 3_11:

- Ungerade Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind haben eine Lösung
- Ungerade Zahlen, die durch 3 teilbar sind haben mehrere Lösungen
- 2er Potenzen: keine Lösung
- Gerade Zahlen haben nur eine Möglichkeit, da diese durch 2 teilbar sind. Zwei aufeinanderfolgende Zahlen wären immer ungerade. Ausser 2er Potenzen, ausser 18. (*Folgehypothese*, *Gegenbeispiele*)
- Zahlen durch 6: 1+2+3

  3+4+5 5+6+7 7+8+9 (*Gruppenbildung*)

Die Gruppe hätte wohl noch mehr Zeit benötigt, um zu erkennen, dass ihre Hypothesen meist nur für kleine Zahlen gelten. Da aber die meisten Gruppen mit ihren Bearbeitungen bereits fertig waren, war es vom Ablauf der Unterrichtsstunde her nicht möglich, die Bearbeitung länger dauern zu lassen.

Erfolgsstrategie

Auch diese Gruppe geht von einem ausführlichen *Reihenfolgebeispiel*, bis 22, aus. Dann bleibt sie aber bei einer Interpretation der Aufgabenstellung hängen: wie viele Treppenzahldarstellungen besitzt jede Zahl? Dabei bleiben die Schülerinnen eng an den ersten 22 Zahlen, die sie untersuchen, finden kaum verallgemeinerbare Hypothesen.

Haverty et al (2000) zeigt bei seinen Vergleichen erfahrener Problemlöser mit "Novizen", dass der Unterbruch der Bearbeitung durch Reflexionsphasen wichtig ist. Das bestätigt sich hier. Die Gruppe verliert aus den Augen, dass sich die Verhältnisse bei grösseren Zahlen ändern können, und dass es weitere mögliche Untersuchungsfragen gibt. Aus dem Vergleich mit der ersten Gruppe lassen sich aus den Unterlassungen der Gruppe Erfolgsstrategin ableiten:

- Reflexivität: Wissen, was gerade getan wird, die eigene Strategie hinterfragen und gegebenenfalls die Untersuchungsrichtung ändern
- Mehrere Ansätze verfolgen
- Zeitmanagement: nicht zu lange bei einer Fragestellung verweilen.
- Ansätze für Begründungen suchen. Hinterfragen, ob die Hypothesen plausibel sind.

4.5.2.3 Erfolgshypothese Teilbarkeitsbedingung

Nr.	Kl.	Ges.	Pro-fil	*Allg Selbstw.*	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg Selbstw.*	*Math-bu.ch*	*Motiv. Math.*	*Ges. Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp mit gewicht*
Mittel. alle				29.3	11.2	10.1	25.2	2.7	2.3	20.0	7.2	1.8
3_03	3	m	G	36	13	13	28	4	3	18	4	5.5
3_04	3	m	S	35	14	13	30	4	3	18	4	5.5
3_07	3	f	G	33	12	13	29		3	22	4	5.5

Diese Gruppe besteht aus drei Personen mit hoher Selbstwirksamkeitsüberzeugung, sowohl allgemein als auch bezogen auf die Mathematik. 3_03 oder 3_04 hätten interviewt werden sollen - waren aber leider am Tage der Interviews nicht anwesend.

Bearbeitungen

Bei der Beobachtung während der Bearbeitung der Aufgaben ist aufgefallen, dass die beiden Männer, 3_03 und 3_04, intensiv zusammen gearbeitet haben, sich anfänglich nur sporadisch mit 3_07 ausgetauscht haben. Als die beiden dann auf ihre "Erfolgshypothese" gekommen waren, haben sie sie 3_07 erklärt. 3_07 hat die Aussage dann noch präzisieren können und erschlossen, ob und wie sich für eine beliebige gegebene Zahl eine Treppe bilden lässt:

3_04 formuliert das folgendermassen (Alle Formulierungen in den Interviews werden leicht geglättet wiedergegeben, gegebenenfalls auch vom Dialekt ins Hochdeutsche transformiert. Die Kategorien werden in kursiv dazu geschrieben. Sie wurden von den Interviewten natürlich nicht genannt.):

> Wenn man eine Zahl durch Anzahl Stellen, die man will, rechnet, bekommt man die Mitte der Treppe. (*Ad-hoc-Hypothese*)
>
> Will man z.B. ungerade (3) Stellen und erhält keine natürliche Zahl, so kann man keine Treppe bilden. Beispiel: 12:3=4=Mitte 3+4+5"(*Bestätigungsbeispiel*)
>
> (…)
>
> 25:5=5=Mitte 3+4+5+6+7.
>
> Will man gerade Zahl als Anzahl Stellen, Beispiel 4 Stellen x+y+Z+D (*Folgehypothese*), so gibt das bei 20
>
> 3.5+4.5+5.5+6.5
>
> 20/4=5, 5 ist die Mitte der dritten und der zweiten Zahl (*Bestätigungsbeispiel*)

3_07 präzisiert den Sachverhalt:

> Bei einer ungeraden Anzahl Treppen muss ich eine natürliche Zahl erhalten und bei einer geraden Anzahl Treppen muss ich eine Dezimalzahl (..,5) erhalten, um eine Treppe zu erhalten.

Die Gruppe kommt zu einer gewissermassen vollständigen Lösung des Problems: sie können jeder Zahl ansehen, ob es eine Treppenzahldarstellung mit vorgegebener Stufenanzahl besitzt. Im Abschnitt "Satz von Sylvester" wird dieser Satz als "Teilbarkeitsbedingung" dargestellt.

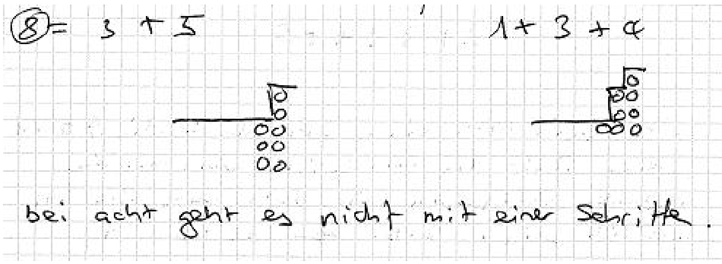
3_07 beginnt, wie die beiden vorigen Gruppen mit einer Reihenfolgeuntersuchung bis 16 und folgert, dass alle ungeraden Zahlen eine Treppenzahldarstellung mit mindestens 2 Stufen haben. Ausserdem:

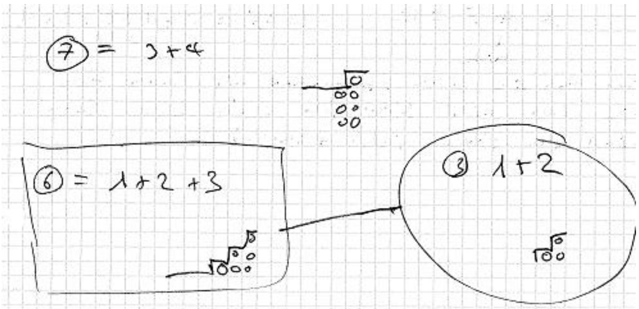
> die geraden Zahlen gehen ausser 2^x.

Daran schliesst sie eine Untersuchung der Zahlen 2^1 bis 2^4 an, in der sie alle Darstellungen mit zwei Summanden aufschreibt (Beispiel $2^2=2+2=1+3$)- und es ist keine Treppenzahldarstellung dabei. Sie fokussiert in ihrer Untersuchung also stark auf zwei Summanden, den einfachsten Fall - was ja auch oft zum Einstieg sinnvoll ist.

Damit kommt sie in der Kategorie *Hyp. mit Gew.* bereits auf 2.5 Punkte, also fast in die Gruppe der erfolgreichen Bearbeitungen.

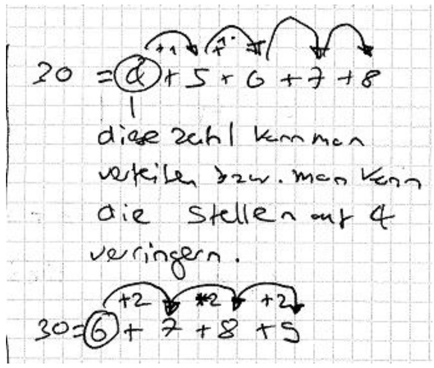
Das Vorgehen von 3_03 unterscheidet sich deutlich von 3_07. Nachdem die Aufgabe mit den ikonischen Darstellungen abgeschrieben wurde, wird die ikonische Darstellung benutzt, um die Aufgabe zu verstehen - und sich auf "Einer-Schritte" zu beschränken:

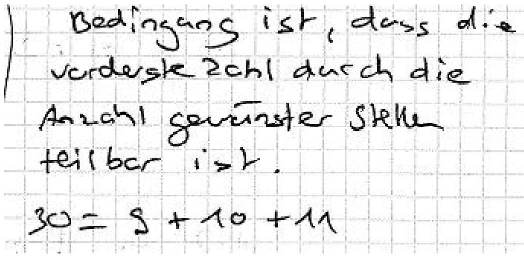




3_03 ist die einzige erfolgreiche Person, die ikonische Darstellungen nutzt - das scheint in diesem Zusammenhang also keine verallgemeinerbare Erfolgsstrategie zu sein. Andererseits werden diese Darstellungen beim *Verstehen der Aufgabe* genutzt, also da, wo oft das Anfertigen einer Skizze gefordert wird. Insofern verhält sich 3_03 schulbuchmässig.

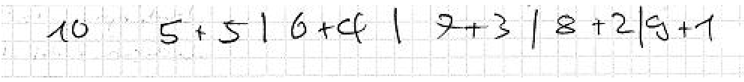
Bei der Annäherung an die Aufgabe macht 3_03 dann eine Entdeckung, wie sich Treppenzahldarstellungen auseinander entwickeln lassen (*Beispielorientierte Hypothese*):

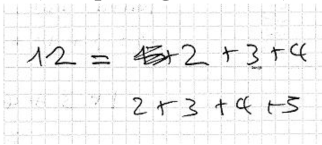




Die Darstellung mit Stufenanzahl 4 von 30=6+7+8+9 wird in die Stufenanzahl 3 verwandelt, indem die 6 auf die drei anderen Zahlen verteilt wird: 30=9+10+11 (*Bestätigungsbeispiel*)

Daran schliesst sich eine Untersuchung an, dass sich die Potenzen von 2 nicht als Treppenzahlen darstellen lassen. Es folgen z Beispiele, deren Einordnung nicht ganz klar ist (Beispiele generieren):





Daran schliesst sich unvermittelt die Teilbarkeitshypothese an. Am ehesten ist die Entwicklung der Hypothese noch bei 3_04 zu erkennen - oben wurde seine Bearbeitung bereits dargestellt.

Auch bei 3_04 schliesst sich an *Verstehen der Aufgabe* und der Aussage zu den Zweierpotenzen direkt die Teilbarkeitshypothese an.

Der Ablauf war wahrscheinlich wie folgt:

Bei einigen (ungeraden) Zahlen wurde beobachtet, dass die Stufenanzahl ein Teiler der Treppenzahl ist. 3_03 und 3_04 haben sich dann mit Teilbarkeitsüberlegungen beschäftigt (bei 3_04 kommt zwischenzeitlich auch das Beispiel 7:3=2.333, also 1.333+2.333+3.333). Daraufhin kommt es, vielleicht im Gespräch mit 3_07, auch zur Formulierung der Hypothese für gerade Stufenanzahlen - die dann von 3_07 am klarsten formuliert wird.

Bei der Erarbeitung ihrer Erfolgsstrategie ist ein intensives Wechseln zwischen den 3 Räumen zu beobachten:

Hypothese (Teilbarkeit ungerade Zahlen), Strategie (was passiert, wenn es keine natürliche Zahl gibt), Beispiele (12:3, 12:4, 7:3 und 25:5), Hypothese für gerade Zahlen, *Bestätigungsbeispiel*.

Das entspricht auch den Beobachtungen von Haverty et al (2000), die ein reflektiertes Arbeiten bei erfolgreichen Problemlösern konstatieren.

Erfolgsstrategie

Diese Gruppe geht anders vor als die ersten beiden. Die Zusammenarbeit etabliert sich erst nach einer gewissen Zeit. Nur eine Person beschäftigt sich ausführlich mit einem *Reihenfolgebeispiel*, die anderen verwenden mehr Zeit auf das Verstehen der Aufgabe. Dann wird aber intensiv an einer vielversprechenden Idee gearbeitet. Ausführliche Beschäftigung mit dem *Verstehen der Aufgabe*.

- Gemeinsame Beschäftigung mit der Idee einer Person
- Verallgemeinerung einer Hypothese, die zunächst nur für Spezialfälle gilt
- Wechseln zwischen den 3 Räumen, um sich die abschliessende Hypothese zu erarbeiten

4.5.3 Sortierung nach Stufenanzahl - Zweite Klasse

4.5.3.1 Potenzieller Erfolg

Nr.r	Kl.	Ges.	Pro-fil	*Allg Selbstw.*	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg Selbstw.*	*Math-bu.ch*	*Motiv. Math.*	*Ges. Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp mit gewicht*
Mittel. alle				29.3	11.2	10.1	25.2	2.7	2.3	20.0	7.2	1.8
2_06	2	f	P	33	12	10	26	4	1	16	20	1
2_07	2	m	P	36	15	15	31	2	2	52	34	2

Auch diese Gruppe besteht aus Personen mit hoher Selbstwirksamkeitsüberzeugung. Auffallend ist die niedrige Motivation in Mathematik - obwohl vor allem 2_07 einen sehr hohen Wert bei *M. Aufg. Selbstw.* hat. In der Kategorie *Hyp. mit Gew.* schneiden die beiden nicht besonders gut ab - genaueres Betrachten zeigt aber, dass das Potenzial für eine erfolgreiche Bearbeitung vorhanden ist.

Beide Personen wurden interviewt - es war bei der Auswahl der Personen für die Interviews nicht klar, dass beide zusammengearbeitet haben. In den Interviews zeigte sich, dass die Zusammenarbeit nicht sehr eng war.

Interviews

Zum Thema Zusammenarbeit sagt 2_06 klar nein, wohingegen mit 2_07 das Gespräch folgendermassen abläuft (vor dem Interview äusserte 2_07, sie hätten zusammen gearbeitet):

Interviewer: Sie haben mit 2_06 (im Interview kam hier natürlich ein Name) zusammengearbeitet, haben Sie gesagt?

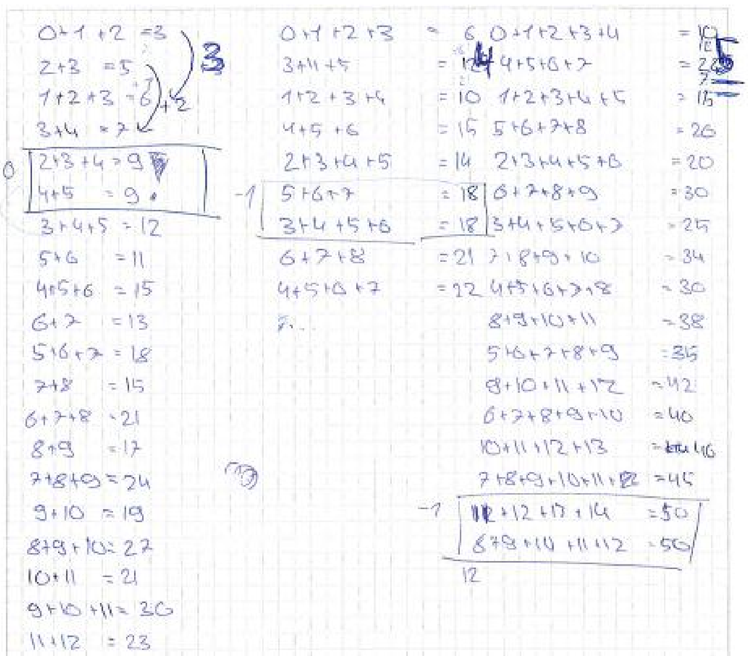
2_07: Ja, wir haben eben zusammen gesessen, haben durch Zufall das gleich herausgefunden.

Die beiden Interviews liefen dann vollkommen verschieden ab. Bei der Untersuchung ist es deshalb sinnvoll, beide getrennt zu bearbeiten. Es wird mit den schriftlichen Ausarbeitungen begonnen.

Bearbeitung von 2_07

Zunächst vergleicht 2_07 verschiedene Stufenanzahlen (*Reihenfolgebeispiel*/ *Gruppenbildung*):

In der ersten Spalte Stufenanzahl 2 und 3, in der zweiten Spalte 3 und 4 und in der dritten Spalte 4 und 5:



Diese Gegenüberstellung ist zwar eigentlich nicht ergiebig, jedoch wird mit den Pfeilen und den eingefügten fett gemalten Zahlen 4 und 5 gezeigt, wie gross die Abstände zwischen den Darstellungen sind. Daraus folgt dann gleich die Hypothese (*beispielorientierte Hypothese*):

> Steigert man 3 Zahlen, so erhöht sich die Summe zu nächsten Stufe um 3. Erhöht man 4 Zahlen, so erhöht sich die Summe jeweils um 4.

Darauf folgen *Bestätigungsbeispiel*e.

> 1+2+3 plus 3 gibt 2+3+4
>
> 1+2 plus 2 gibt 2+3
>
> 1+2+3+4+5+6 plus 6 gibt 2+3+4+5+6+7

Diese Beispiele werden aber nicht in eine allgemeine Hypothese formuliert. Im Interview zeigt sich dann, dass 2_07 das Thema gut durchdrungen hat.

Interview mit 2_07

Zunächst geht es um die Motivation und Selbstwirksamkeitsüberzeugung:

> I: Sie haben ausgefüllt, dass Sie denken, dass Sie gut in Mathematik sind.
>
> 2_07: Wenn ich mir Mühe gebe ist es kein Problem.
>
> I: Aber die Motivation war nicht so gross?
>
> 2_07: Es kommt auch darauf an, was für ein Thema es ist, ich habe Algebra nicht so gerne. Da muss ich mir Mühe geben und es begreifen. Wenn ich etwas zeichnen muss, Flächenberechnungen und Trigonometrie, dann kann ich es mir vorstellen.
>
> I: Bei der Primarlehrpersonenausbildung werden auch arithmetische Zusammenhänge meist nicht algebraisch begründet, sondern mit Zeichnungen. Das könnte Ihnen sehr entgegenkommen.
>
> 2_07: Ich habe es auch gut gefunden, das mit den Flächen aufzuzeichnen bei den binomischen Formeln. Das macht es viel übersichtlicher für mich.

Interessanterweise verwendet 2_07 dann keinerlei ikonische Darstellungen in seiner Bearbeitung. Im Interview wird erarbeitet, wie es mit Stufenanzahl 3 funktioniert: Durch 3 teilen, beispielsweise ist 3*9=27, damit hat 27 die Treppe 8+9+10. Ihm ist klar, dass durch 3 teilbare Zahlen eine Treppenzahldarstellung mit Stufenanzahl 3 haben. Im Verlauf des Interviews sagt er häufiger "weiss nicht", obwohl das Wissen vorhanden ist. Es geht mehr um Formulierungen, die er sich nicht zurtraut.

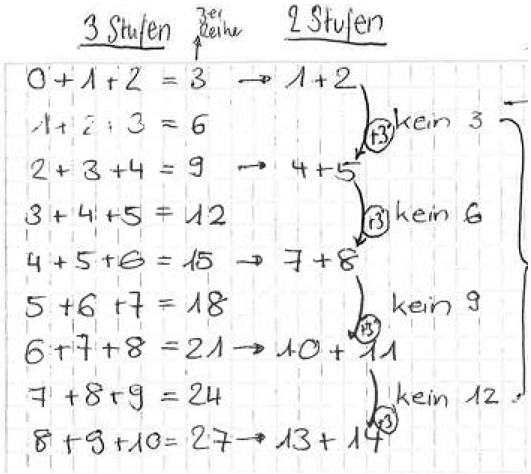
Die Teilbarkeitsbedingung kann er schnell für alle Treppenzahldarstellungen verallgemeinern:

> I: Können Sie die Beobachtung für Dreiertreppen verallgemeinern?
>
> 2_07: Ich weiss nicht, wie ich das formulieren soll.
>
> I: Die nächste Stufenanzahl wäre 4.
>
> 2_07: Ich weiss nicht, mit 5 funktioniert es, also: Mit ungeraden Zahlen geht es, mit geraden nicht. (*Folgehypothese*)
>
> I: Können Sie das begründen?
>
> 2_07: Bei ungeraden Zahlen gibt es eine Mittelzahl, bei geraden nicht. (*Begründung*)
>
> I: Was passiert bei geraden Zahlen, welche Zahlen sind 4er Treppen?
>
> 2_07: 6, 10, 14 *(Hier passiert etwas Interessantes: 2_07 zählt die Null mit bei den Möglichkeiten, also 0+1+2+3=6. Das führte im Interview noch zu Verwirrung.)*
>
> I: Wie können Sie das charakterisieren?
>
> 2_07: Vierer Reihe +2 (*beispielorientierte Hypothese*)

Im weiteren Verlauf des Interviews wird dann der Satz "Teilbarkeitsregel" ansatzweise herausgearbeitet und dass sich Zweierpotenzen nicht als Treppenzahlen darstellen lassen.

Bearbeitung von 2_06

Zunächst werden Stufenanzahl 2 und 3 gegenübergestellt, allerdings in einer anderen Darstellung als bei 2_07 (*Reihenfolgebeispiel*/*Gruppenbildung*):



Das führt zur Hypothese (*beispielorientierte Hypothese*):

> Summe der 3er-Treppenzahlen ergeben immer eine Zahl aus der Dreierreihe, die Summe der 2er-Treppenzahlen genauso. (*Folgehypothese*)

Der zweite Teil der Hypothese ist falsch - oben ist ersichtlich, dass die nicht durch 3 teilbaren Treppenzahldarstellungen mit Stufenanzahl 2 vergessen gingen.

Daraufhin werden noch Stufenanzahlen 3 und 4 verglichen (*Reihenfolgebeispiel*/*Gruppenbildung*), mit dem Resultat, dass für Stufenanzahl 4 gilt:

> Jede dritte Zahl hat auch 3er-Treppenzahlen. (*beispielorientierte Hypothese*)

Die Verallgemeinerung der Abstände auf beliebige Stufenanzahlen ist hier nicht angelegt. Im Interview zeigt sich dann, dass 2_06 diese aber kannte.

Interview mit 2_06

Zunächst wurde über Dreier, Vierer und Sechsertreppen gesprochen. Darin kommt folgende Aussage vor:

> 2_06: Gerade Zahlen sind nicht in der richtigen Reihe, haben schon den richtigen Abstand, sind aber nicht in der richtigen Reihe." (*beispielorientierte Hypothese*)

Auch 2_06 hatte mehr verstanden als aufgeschrieben.

Im weiteren Interview ging es dann darum, ob 5500 oder 5600 eine Darstellung mit Stufenanzahl 100 haben. Dies hat 2_06 nicht lösen können.

Bei der Diskussion über Zahlen, die keine Treppenzahldarstellung hatten, werden 14 und 18 probiert, (*Gegenbeispiele*) schliesslich werden die Zweierpotenzen erkannt. (*Beispielorientierte Hypothese*)

Erfolgsstrategie

- Viele Beispiele produzieren und diese genau analysieren.
- Die eigenen Überlegungen müssen als Hypothesen formuliert werden können.

Die zweite Strategie lässt sich auch als Forderung an den Mathematikunterricht lesen.

4.5.3.2 Sortierte Beispiele

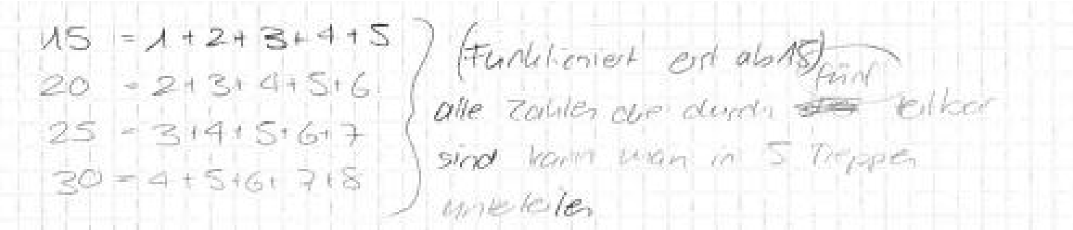
Nr.r	Kl.	Ges.	Pro-fil	*Allg Selbstw.*	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg Selbstw.*	*Math-bu.ch*	*Motiv. Math.*	*Ges. Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp mit gewicht*
Mittel. alle				29.3	11.2	10.1	25.2	2.7	2.3	20.0	7.2	1.8
2_10	2	f	G	27	11	12	26	4	3	34	16	6
2_13	2	f	G	29	11	14	29	4	3	39	20	6

Die beiden Schülerinnen liegen bezüglich Selbstwirksamkeitsüberzeugungen im Mittelfeld, haben eine leicht erhöhte Motivation und beide das mathbu.ch in der Sekundarstufe I intensiv verwendet.

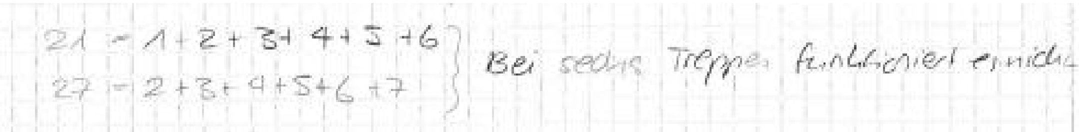
Interviews liegen zu dieser Gruppe nicht vor.

Bearbeitungen

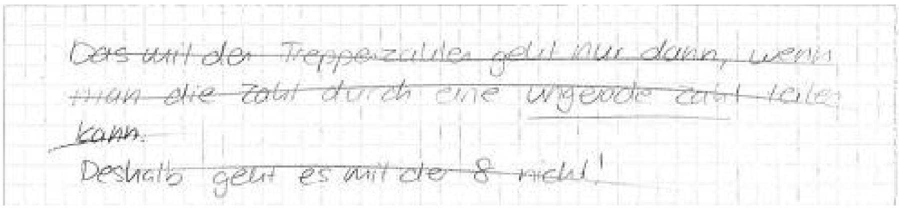
Die beiden verzichten völlig auf *Reihenfolgebeispiel*e von 1 bis zu einer gewissen Zahl und fokussieren sofort auf Treppen mit einer gewissen Stufenanzahl (*Reihenfolgebeispiel*/*Gruppenbildung*), wobei sie jeweils mit der 1 beginnen. Hier die Ausarbeitung von 2_10 zur Stufenanzahl 5:



Das folgende Beispiel zeigt, dass erkannt wurde, dass die Teilbarkeit nicht immer das richtige Kriterium ist:



So kommen die beiden zu wesentlich mehr Hypothesen als die vorige Gruppe (*beispielorientierte Hypothesen*). Dies erklärt die hohe Wertung bei "Hypothesen mit Gewicht." Eine Verallgemeinerung gelingt aber nicht. Der einzige Versuch wurde durchgestrichen (*Folgehypothese*):



Welche Zahlen keine Treppenzahldarstellungen besitzen, wurde von der Gruppe nicht erkannt.

Erfolgsstrategie

- Beispiele sofort sortiert notieren, um Gemeinsamkeiten entdecken zu können.

4.5.4 Verschiedene Strategien - Erste Klasse

Aus der dritten Klasse werden drei Gruppen genauer angeschaut: die erste hat ähnlich wie die Gruppen der zweiten Klasse mit sortierten Beispielen gearbeitet, die zweite hat eine Beziehung zu den binomischen Formeln gefunden und ausserdem wurde eine Person, die keine eigenen Beispiele generiert hat, betrachtet

4.5.4.1 Sortierte Beispiele II

Nr.r	Kl.	Ges.	Pro-fil	*Allg Selbstw.*	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg Selbstw.*	*Math-bu.ch*	*Motiv. Math.*	*Ges. Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp mit gewicht*
Mittel. alle				29.3	11.2	10.1	25.2	2.7	2.3	20.0	7.2	1.8
1_09	1	f	G	27	11	7	19	1	2	20	20	3
1_10	1	f	K	26	10	9	28	1	2	20	20	3

1_09 und 1_10 weisen leicht unterdurchschnittliche Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und Motivation in Mathematik auf. Das mathbu.ch wurde in ihren Klassen nicht eingesetzt. Interviews liegen nicht vor - also wird die Untersuchung hier kurz ausfallen.

Bearbeitungen

Die beiden Gruppenmitglieder beginnen mit verschiedenen Treppen mit Stufenanzahl 3 (*Reihenfolgebeispiel*/*Gruppenbildung*). Dabei stellt 1_10 diejenigen ab Startzahl 11 bis Startzahl 17 dar:

16 + 17 + 18 = 51 2
15 + 16 + 17 = 49 4
14 + 15 + 16 = 45 3
13 + 14 + 15 = 42 3
12 + 13 + 14 = 39 3
11 + 12 + 13 = 36
17 + 18 + 19 = 54

1_9 beginnt mit Startzahl 32. Dann bringen beide noch 7 bzw. 9 Beispiele mit niedriger Startzahl und formulieren die Hypothese (*beispielorientierte Hypothese*):

> "Alle Zahlen, die so ausgerechnet werden können, sind in der 3er Reihe."

Mit weiteren Beispielen formulieren sie die analoge Hypothese für die Fünferreihe. Dann beschäftigen sie sich mit der Viererreihe (*Reihenfolgebeispiel*/*Gruppenbildung*):

1 + 2 + 3 + 4 = 10
2 + 3 + 4 + 5 = 14
3 + 4 + 5 + 6 = 18
In der 4e Reihe enthalten.

und folgern (*beispielorientierte Hypothese*)

Die Anzahl der Zahlen, die Multiplitziert weden, in dieser Reihe kommen die Resultate vor.

was falsch ist.

Erfolgsstrategie

- Strukturierte Beispiele tiefgehend betrachten.
- Nicht unzulässig verallgemeinern.

4.5.4.2 Verwendung von Algebra

Nr.r	Kl.	Ges.	Pro-fil	*Allg Selbstw.*	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg Selbstw.*	*Math-bu.ch*	*Motiv. Math.*	*Ges. Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp mit gewicht*
Mittel. alle				29.3	11.2	10.1	25.2	2.7	2.3	20.0	7.2	1.8
1_04	1	f	G	31	14	13	25	1	2	30	16	3
1_05	1	f	P	30	14	16	31	4	4	65	21	2

Die beiden Schülerinnen fielen bei der Bearbeitung der Lernumgebung zur 1x1-Tafel durch eine engagierte Bearbeitung auf. Sie waren die einzige Gruppe, die dort algebraische Ansätze versucht hat, andererseits fiel im Unterrichtsgespräch auch der Satz

> "Das kann man nicht begründen, das ist halt Mathematik."

1_05 hat bei Selbstwirksamkeit bezüglich Mathematikaufgaben, mathematischer Motivation und Einsatz des matbu.ch deutlich höhere Werte.

Auffallend ist zum einen die hohe Beispielanzahl von 1_05 und zum anderen, dass versucht wurde, mit Formeln zu operieren.

Bearbeitungen

Die erste Seite ihrer zwei Seiten Bearbeitung widmen sich die beiden dem Verstehen der Aufgabe, hier zwei Resultate von 1_05 (*Aufgabe verstehen*):

Zwischen Treppen => Nur $\underline{\underline{1}}$ als Untersch

Was man über die Treppen weiss:
- Es gibt eine ~~A Differenz~~ Differenz von 1 zwischen den Stufen
- ~~Je nach~~ Die Anzahl Zahlen ~~gibt~~ sind gleich wie Anzahl Stufen
(x+y=2 Stufen; x+y+z= 3 Stufen, etc.)

Das wird genutzt um zu zeigen, dass es bei der 8 nur Treppendarstellungen mit Dezimalbrüchen gibt:

8 nicht möglich da 1+2+3=6
(Dezimalbruch hinzufügen)
2+3+4=9 2+3=5 (also weniger)
3+4=7 und 3+4+5 > 10
Man müsste Dezimalbrüche benutzen um es zu knacken

$\boxed{8 = 3,5+4,5}$

Die Bearbeitungen der beiden unterscheiden sich insofern, als 1_05 mehr Beispiele anfertigt.

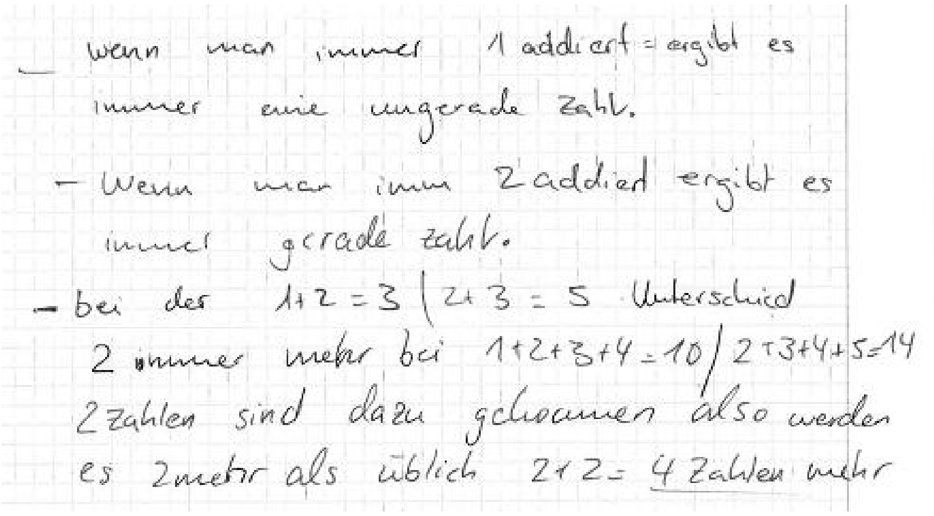
Auf der zweiten Seite beschäftigen sich beide mit verschiedenen sortierten Beispielen - und den binomischen Formeln. Zuerst zu den Beispielen:

1+2+3=6
2+3+4=9
3+4+5=12
4+5+6=15
– 3er Reihe

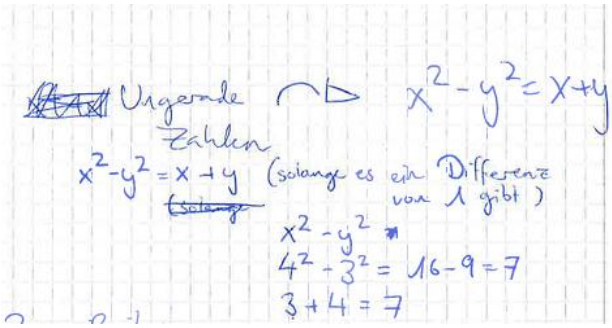
1+2+3+4 = 10
2+3+4+5 = 14
3+4+5+6 = 18
4+5+6+7 = 22

0,5+1,5 = 2
1,5+2,5 = 4
2,5+3,5 = 6
3,5+4,5 = 8
4,5+5,5 = 10
– Gerade Zahlen 2er Reihe

Hier unterscheiden sich die beiden, insofern 1_04 die Ergebnisse formuliert (und deshalb auch bei *Hyp. mit Gew.* besser abschneidet (*beispielorientierte Hypothese*):


– wenn man immer 1 addiert = ergibt es immer eine ungerade Zahl.
– Wenn man imm 2 addied ergibt es immer gerade zahl.
– bei der 1+2=3 | 2+3=5 Unterschied 2 immer mehr bei 1+2+3+4=10 / 2+3+4+5=14 2 Zahlen sind dazu gekommen also werden es 2mehr als üblich 2+2= 4 Zahlen mehr

Ausserdem versuchen die beiden, das Thema mit der letzten Lernumgebung, 1x1-Tafel und dritte binomische Formel, in Verbindung zu bringen. Das ist normalerweise eine vielversprechende Strategie für Schülerinnen und Schüler. Haverty et al (2000) sehen das eher als Nachteil, da nicht direkt am Thema gearbeitet wird, einfach "irgendetwas" geforscht wird. Interessanterweise kommt es dann doch zu einem Resultat (*beispielorientierte Hypothese*):


Ungerade Zahlen $\Rightarrow x^2-y^2=x+y$
$x^2-y^2=x+y$ (solange es ein Differenz von 1 gibt)
~~(solange~~
x^2-y^2
$4^2-3^2=16-9=7$
$3+4=7$

Treppenzahlen mit Stufenanzahl 2 ergeben die Differenz der Quadrate der beiden Summanden.

Also $x+y=x^2-y^2$, wenn die Differenz 1 beträgt. (Ein Beispiel vom Autor: 16+17=33 und $17^2-16^2=289-256=33$) Die beiden sind dann allerdings nicht in der Lage, dies zu begründen ($y=x-1$, also $x^2-y^2= x^2-(x-1)^2= x^2-x^2+2x-1=2x-1=x+y$)

1_05 versucht dann, eine ähnliche Beziehung für Differenz 2 zu finden (*Beispiele generieren*), statt Hypothesen zu notieren.

Interview

Mit 1_05 wurde ein Interview geführt.

Zunächst merkt 1_05 an, dass ihre Entscheidung, bei der 8 anhand des Durchprobierens aller Möglichkeiten zu zeigen, dass keine Treppenzahldarstellung existiert, nicht gut war: das lässt sich nicht bei grösseren Zahlen anwenden (*Struktursuche*). Hier zeigt sie Überblick.

Dann wird über ihre Eingrenzung der Aufgabe, keine Dezimalzahlen, diskutiert und schliesslich ausführlich über die Behandlung der binomischen Formel. Diese dann anzuwenden und $(x-1)^2$ auszumultiplizieren fällt ihr schwer.

Schliesslich wurde noch über Teilbarkeitsbedingungen gearbeitet. 1_05 konnte bis zur Stufenanzahl 8 sagen, wie die Bildungsgesetze sind (Achterreihe plus 4, *beispielorientierte Hypothese*). Eine Verallgemeinerung für gerade und ungerade Zahlen wurde nicht explizit versucht, wurde aber auch nicht angeregt. (Es war das erste Interview, es gab noch keine Vergleichsmöglichkeiten mit anderen Interviews.)

Insgesamt hat 1_05 gezeigt, dass sie das Thema durchdrungen hat, der Wechsel auf eine Argumentationslinie, die bei ihrer Bearbeitung (siehe die Viererketten) zwar nahe lag, die sie aber noch nicht angedacht hatte, fiel ihr leicht.

Erfolgsstrategie

- Aufgabe verstehen
- Verschiedene Ansätze verfolgen (Dezimalzahlen, binomische Formeln, sortierte Beispiele mit fester Stufenanzahl)
- Hypothesen formulieren, nicht nur andenken
- Bei algebraischen Ansätzen Formeln manipulieren

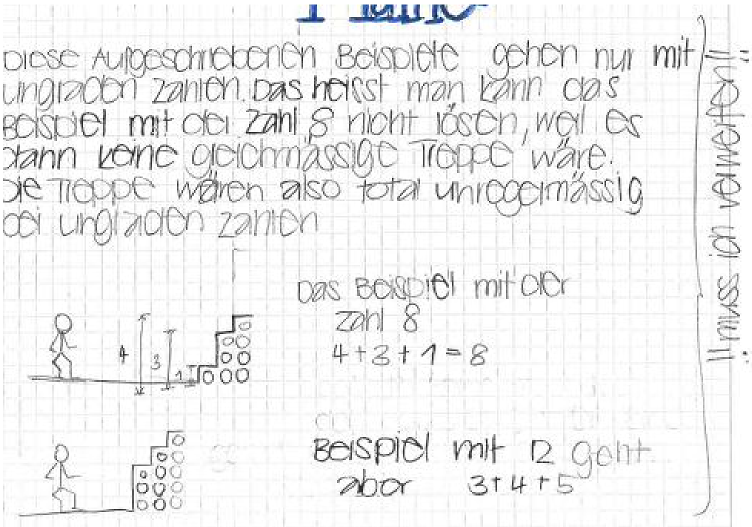
4.5.4.3 Keine Beispiele

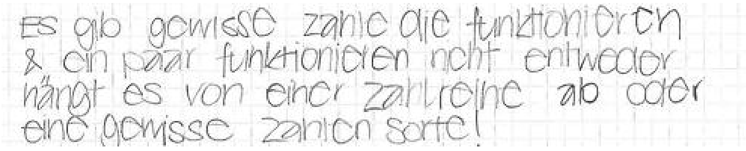
Nr.r	Kl.	Ges.	Pro-fil	*Allg Selbstw.*	*Schul. Selbstw.*	*Math. Selbstw.*	*M. Aufg Selbstw.*	*Math-bu.ch*	*Motiv. Math.*	*Ges. Bsp.*	*Sort. Bsp.*	*Hyp mit gewicht*
Mittel. alle				29.3	11.2	10.1	25.2	2.7	2.3	20.0	7.2	1.8
1_23	1	f	P	35	11	12	25	4	3	0	0	0

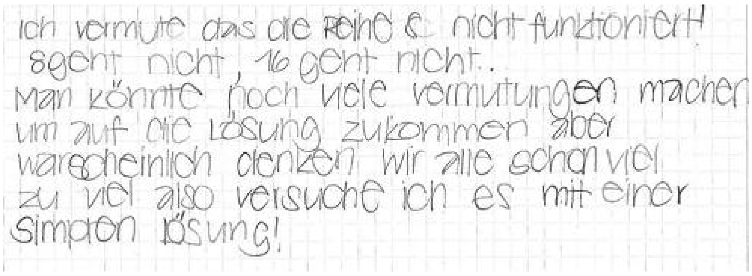
1_23 hat mit einer Partnerin die Bearbeitung begonnen, die dann aber völlig das Interesse verloren hat. 1_23 hat daraufhin alleine weiter gearbeitet, anscheinend engagiert.

Bearbeitung

Die Bearbeitung von 1_23 wird hier vollständig aufgeführt:







Auffällig ist, dass 1_23 kein eigenes Beispiel versucht: Die 12 war auf dem Aufgabenblatt vorgegeben, bei der 8 war vorgeschlagen, etwas zu probieren. 1_23 war die einzige Person, die sich intensiv mit der Aufgabe auseinander gesetzt hat, ohne Beispiele zu produzieren.

Interview

Im Interview kam der Kernsatz

> 1_23: Die meisten Lehrer sagen, ihr überlegt zu viel.

Das kann erklären, warum 1_23 davor zurück schreckte, in die Tiefe zu gehen. Im Interview ging es dann darum, mit Beispielen zu arbeiten:

> 1_23: meine Kollegin sagte mir zu Anfang, dass nur die ungeraden Zahlen funktionieren, dann habe ich aber gemerkt…
>
> I: Machen Sie Beispiele, darauf haben Sie in Ihrer Ausarbeitung verzichtet.
>
> 1_23: Zum Beispiel 6 (*Gegenbeispiel*, *kleinstes Beispiel*).

1_23 ist also durchaus in der Lage, sinnvoll Beispiele zu produzieren: 6 ist das kleinste *Gegenbeispiel* zur Hypothese ihrer Kollegin. Beim Ausrechnen von 6=1+2+3 stockt sie dann kurz - durch das Interview hindurch ziehen sich Schwierigkeiten bei konkreten Rechnungen. Später sucht sie beispielsweise zwei Zahlen, die zusammen 23 ergeben und notiert 15+16 und danach 16+17. Das zweite Ergebnis ist besser, zumindest die Einerstelle stimmt. Auf den Hinweis des Interviewers, dass es 10 zu viel sind, findet sie dann 11+12.

Im Interview ist 1_23, trotz ihrer Schwierigkeiten beim Rechnen, dann in der Lage, Hypothesen zu bilden (*Hypothese formulieren*) und diese mit Beispielen zu hinterlegen (*Bestätigungsbeispiel*). Zum Beispiel:

> 1:23: Die Sechserreihe geht.

Schön ist dann:

> 1_23: Je höher die Zahl ist, desto mehr Möglichkeiten gibt es. Ist ja logisch, bei einer kleinen Zahl kann man nicht so viele Zahlen brauchen. (*Folgehypothese*, *Begründung*)

Die Aussage ist wahr: Grössere Zahlen haben mehr Teiler als kleinere, mithin auch mehr ungerade Teiler. Die Dichte der Primzahlen nimmt ab.

Zur Begründung dieser Hypothese kommt dann

> 1_23: Wenn es eine höhere Zahl ist, kann man immer runter gehen (wohl *mit der Stufenanzahl?)*, wenn es eine kleinere Zahl ist, kann man nicht rauf gehen. (*Begründung*)
>
> I: Welche würde sich anbieten, das zu überprüfen?
>
> 1_23: Zum Beispiel 3, da gibt es nur eine Treppe 1+2, mehr geht nicht. (*Bestätigungsbeispiel*)

Hier ist 1_23 in der Lage, mit dem kleinsten Beispiel zu argumentieren. Auf die Frage, welches grössere Beispiel sie anschauen würde, wählt sie 21 (grosses Beispiel) - hat dann aber Schwierigkeiten, die Summe zu bilden. Das Beispiel ist gut, es gibt sowohl eine Treppe mit Stufenanzahl 6 als auch eine mit Stufenanzahl 3.

Eine weitere interessante Beobachtung:

> I: Sie haben jetzt herausgefunden, dass 23=11+12. Sehen Sie ein Prinzip?
>
> 1_23: Die zweite Zahl ist aufgeteilt, durch 2.

Hier sieht sie den Mittelwert in der Treppenzahldarstellung.

Mit viel Mühe wird dann erarbeitet, dass die Zweierpotenzen keine Treppenzahldarstellung besitzen. Ihr abschliessendes Statement ist:

> 1_23: Ungerade Zahlen gehen. Bei den anderen muss man sich Mühe geben.

Erfolgsstrategie

Auffallend ist, dass 1_23 mit kleinen Anregungen in der Lage war, gute Hypothesen zu produzieren, die zwar oft qualitativer Natur waren, aber wichtige Richtungen aufzeigten. Dazu brauchte es aber kleine Interventionen des Interviewers.

- Gute Lernwegbegleitung

Das Aussteigen der zweiten Person aus der Gruppe lässt auf das Fehlen folgender Erfolgsbedingungen schliessen.

- Intensive Auseinandersetzung mit der Aufgabe
- Interesse an Aufgabe, Motivation.

4.5.5 Zusammenfassung der Erfolgsstrategien

Es werden zunächst alle Erfolgsstrategien, die notiert wurden, zusammengefasst. Das 3-Räume-Modell hilft dabei bei der Strukturierung - und erweist wieder seine Nützlichkeit. Erweitert wird es um die Kategorie "Aufgabe verstehen".

Die meisten Einträge sind im Strategieraum zu erwarten - es geht ja um Erfolgsstrategien.

Aufgabe verstehen

- Aufgabe verstehen
- Intensive Auseinandersetzung mit der Aufgabe
- Interesse an Aufgabe, Motivation

Arbeit im Beispielraum

- Arbeitsteilung, eine Gruppenleitung kann helfen, die Arbeit zu strukturieren
- Effektiv Datenbasis für spätere Untersuchungen anlegen
- Viele Beispiele produzieren und diese genau analysieren

Arbeit im Strategieraum

- Beispiele sofort sortiert notieren, um Gemeinsamkeiten entdecken zu können
- Strukturierte Beispiele tiefgehend betrachten
- Reflexivität: Wissen, was gerade getan wird, die eigene Strategie hinterfragen und gegebenenfalls die Untersuchungsrichtung ändern.
- Mehrere Ansätze verfolgen
- Ansätze für Begründungen suchen
- Hinterfragen, ob die Hypothesen plausibel sind
- Gemeinsame Beschäftigung mit der Idee einer Person
- Verschiedene Ansätze verfolgen (Dezimalzahlen, binomische Formeln, sortierte Beispiele mit fester Stufenanzahl)
- Bei algebraischen Ansätzen Formeln manipulieren
- Zeitmanagement: Nicht zu lange bei einer Fragestellung verweilen

Arbeit im Hypothesenraum

- Kreativ Hypothesen bilden; dabei durchaus alleine denken
- Verallgemeinerung einer Hypothese, die zunächst nur für Spezialfälle gilt
- Nicht unzulässig verallgemeinern
- Wechseln zwischen den 3 Räumen, um sich die abschliessende Hypothese zu erarbeiten
- Die eigenen Überlegungen müssen als Hypothesen formuliert werden können
- Hypothesen formulieren, nicht nur andenken
- Geordnet Ergebnisse zusammen fassen

Diese Liste enthält Ansätze für weitere Verbesserungen der Lernumgebungen, aber auch für eine Didaktik des Experimentierens:

- Eine **Lernwegbegleitung** ist sinnvoll. Die Lehrperson muss vorgängig über ein Repertoire von verschiedenen möglichen Lernwegen verfügen und wissen, wie mit kleinen Tipps diese Wege zu tieferen Bearbeitungen führen
- **Fachsprache**: Einige Gruppen scheiterten an der Formulierung der Hypothesen. Die mathematische Sprachproduktion der Schülerinnen und Schüler muss angeregt werden. Dabei geht es weniger um das Vokabular als überhaupt um die Art, wie in der Mathematik formuliert wird (Syntax und Semantik).
- **Engagement**: Von vielen Schülerinnen und Schülern kamen nur sehr kurze Ausarbeitungen zurück. Da beispielsweise von den Schweizer Bildungsstandards die Kompetenz Forschen und Explorieren gefordert ist, muss die Motivation so zu arbeiten angeregt werden. Die offene Arbeitsform in Lernumgebungen hat nicht unbedingt mehr Engagement zu Folge

5 Diskussion und Ausblick

5.1 Diskussion

In dieser Diplomarbeit wurden drei Untersuchungen angestellt.

Übertragung des Kategoriensystems von Leuders, Naccarella, Philipp (2011)

Mit der Ergänzung *Aufgabe verstehen* lässt sich das Kategoriensystem von Leuders et al (2011) für schriftliche Bearbeitungen übernehmen und erfasst Strategien bei den Schülerinnen und Schülern der Fachmittelschule vollständig. Zu berücksichtigen ist, dass sich bei schriftlichen Bearbeitungen der zeitliche Ablauf der Entstehung nicht nachvollziehen lässt. Der Wechsel zwischen den 3 Räumen lässt sich gut dokumentieren, der typische Ablauf ist: Beispiele generieren, oft als *Reihenfolgebeispiel* (Beispielraum) -> *Gruppenbildung* (Strategieraum)-> *beispielorientierte Hypothese* (Hypothesenraum) -> *Bestätigungsbeispiel* (Strategieraum)

Quantitative Untersuchung zu Persönlichkeitsmerkmalen und dem Vorgehen beim innermathematischen Experimentieren

Es gibt Klassen, in denen mittlere bis hohe Korrelationen zwischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und Aspekten des experimentellen Verhaltens feststellbar sind. Diese Korrelationen sind allerdings nicht stabil und können leicht von verschiedenen Einflussfaktoren überlagert werden.

Qualitative Analyse: Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren

Leuders et al (2011) und Haverty et al (2000) beschreiben den häufigen Wechsel zwischen drei Tätigkeiten als zentral für erfolgreiches Experimentieren. Dies konnte in dieser Arbeit bestätigt werden. Darüber hinaus konnten Hinweise für geeignete Lernwegbegleitungen gewonnen werden und so Anknüpfungspunkte für die weitere Arbeit geschaffen werden.

5.2 Ausblick

Lernumgebungen haben sich als geeignete Unterrichtsform für die Fachmittelschule erwiesen - und als ergiebiges Untersuchungsobjekt. Auf diesem Gebiet möchte ich weiter Forschung und Entwicklung betreiben.

Mehr ins Zentrum rücken möchte ich hierfür die Idee von langfristigem Kompetenzerwerb entlang der Bildungsstandards von KMK (2004) und EDK (2011). Um dabei Kompetenzen breiter einzubinden, werden Übungsmaterialien nach dem Prinzip des produktiven Übens (für eine Definition siehe Krauthausen et al 2007) entwickelt.

Beim Entwickeln der Materialien werde ich die Zusammenarbeit mit Kolleginnen und Kollegen an verschiedenen Schulen suchen. Resultat soll eine Materialsammlung für die Fachmittelschule sein, die aktuellen fachdidaktischen Standards genügt - und ausserdem gut ins Curriculum eingebunden ist. Die Form der Materialsammlung ist offen, hängt von allfälligen Geldgebern ab.

In der vorliegenden Diplomarbeit wurden hauptsächlich die schriftlichen Ausarbeitungen untersucht - wie die Prozesse genau zeitlich aufeinander folgten, konnte so nicht untersucht werden. Die Ergebnisse insbesondere des Abschnitts "Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren" zeigen, dass es wichtig ist, den Einsatz der Lernumgebungen zu begleiten: welche Prozesse ablaufen hängt wesentlich von Engagement und Lernbegleitung ab. Das soll bei weiteren Lernumgebungen verstärkt berücksichtigt werden. Zu jeder Lernumgebung gehören also Empfehlungen für Lernwegbegleitungen. Anknüpfen lässt sich dabei an diese Diplomarbeit, aber auch an Philipp und Leuders (2010), die ihr Kategoriensystem für ein Trainingsprogramm zum innermathematischen Experimentieren nutzen.

Parallel werde ich Untersuchungen anstellen über die Art des Mathematikunterrichts an Fachmittelschulen und auch Befragungen darüber durchführen, was von abnehmenden Institutionen gewünscht wird: Krankenhäuser und Pädagogische Hochschulen sind dabei die ersten Ansprechpartner. Die Ergebnisse können in den Entwurf der Materialien direkt einfliessen, können Anregungen zu weiteren Materialien bieten.

Anschliessen daran soll sich eine grössere Interventionsstudie, zu der die vorliegende Diplomarbeit dann eine Pilotstudie wäre.

In verschiedenen Klassen der Fachmittelschule sollten während eines Semesters mehrere Lernumgebungen eingesetzt werden, komplett mit Lernwegbegleitung. Analysiert wird der Prozess im Hinblick auf die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen und die Motivation der Schülerinnen und Schüler. Abschliessend wird in diesen Klassen und in einer Kontrollgruppe eine zu bewertende Lernumgebung eingesetzt. Es wird untersucht, ob der vorgängige Einsatz der Lernumgebungen messbare Einflüsse auf die Leistung hat.

6 Literaturverzeichnis

Affolter, W. et al (2003): mathbu.ch 8 - Lernumgebungen. Bern: Schulverlag blmv und Zug: Klett und Balmer

Affolter, W. et al (2009): Schweizer Zahlenbuch 5. Zug: Klett und Balmer

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. American Educational Research Journal

DMV, GDM, MNU (2008): Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf (Zugriff, 14.7.2010)

EDK, Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (2004): Rahmenlehrplan für Fachmittelschulen. edudoc.ch/record/2033/files/5-1d.pdf

EDK, Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (2011): Basisstandards für die Mathematik. edudoc.ch/record/36469/files/Standards_Math_d.pdf

Haverty, A., Koedinger, R.K., Klahr, D. & Alibalt, M. (2000): Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. In: Cognitive Science, Vol 24, S. 249-298.

Hengartner, E., Hirt, U. & Wälti, B.(2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Zug: Klett

Hirt, U. & Wälti, B. (2008): Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Seelze: Kallmeyer

Klahr, D., & Dunbar, K. (1988). Dual space search during scientific reasoning. Cognitive Science, 12, 1–48.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg: Spektrum

Kultusministerkonferenz (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss, http://www.kmk.org/fileadmin/pdf/Bildung/Hauptschule_Mathematik_BS_307KMK.pdf

Kunter, M. (2002): PISA 2000: Dokumentation der Erhebungsinstrumente. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung: Berlin

Kunter, M. & Baumert, J. Et al (2011): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Münster: Waxmann

Leuders, T., Naccarella, D. & Philipp, K. (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32(2), 205 - 231

Peirce, C. S. (Hrsg.) (1965). Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften. Hrsg. von E. Walter. Baden-Baden: Agis Verlag GmbH

Pellegrino, J.W. and Glaser, R. (1982): Analyzing aptitudes for learning: Inductive Reasoning. In R. Glaser (Hrsg.): Advances in instructional psychology (Vol. 2). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Philipp, K., Leuders, T. (2010). Innermathematisches Experimentieren – Eine empirische Analyse von Denkprozessen beim Experimentieren mit Beispielen. Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag

Philipp, K., Leuders, T. (2011). Experimentelles Denken fördern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 619-622. Münster: WTM Verlag

Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern: Francke-Verlag

Ramm G. et al (2006): PISA 2003. Dokumentation der Erhebungsinstrumente. Münster: Waxmann

Satow (1999): Skalendodumentation der Schülervariablen. In: Ralf Schwarzer R, Jerusalem M. (Hrsg.): Skalen zur Erfassung von Lehrer- und Schülermerkmalen. Dokumentation der psychometrischen Verfahren im Rahmen der Wissenschaftlichen Begleitung des Modellversuchs Selbstwirksame Schulen. Berlin

Schelldorfer, R. (2007): Summendarstellungen von Zahlen. In: Praxis der Mathematik, 17, S. 25-27

Scherer, P. & Steinbring, H (2007).: Zahlen geschickt addieren. In: Müller, G., Steinbring, H.& Wittmann, C. (Hrsg.): Arithmetik als Prozess, 2. Auflage. Seelze: Kallmeyer

Scherer, P. & Steinbring, H. (2007b): Summenformeln. In: Müller, G., Steinbring, H.& Wittmann, C. (Hrsg.): Arithmetik als Prozess, 2. Auflage. Seelze: Kallmeyer

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan

Schwätzer, U. & Selter, C.(1998): Summen von Reihenfolgezahlen - Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. In: Journal für Mathematik-Didaktik. 19(2-3), S. 123-148.

Schwätzer, U. & Selter, C. (2010): Reihenfolgezahlen. http://www.pikas.tu-dortmund.de/upload/Material/Haus_7_-_Gute_-_Aufgaben/IM/Informationstexte/Haus7_Reihenfolgezahlen.pdf (Zugriff im Februar 2012)

Selter, C. & Spiegel, H. (1997): Wie Kinder rechnen. Leipzig: Klett Grundschulverlag

Winter, H. (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: Journal für Mathematikdidaktik 4(1), S. 59–95.

Wittmann, E. (1992): Mathematikdidaktik als ‚design science. In: Journal für Mathematikdidaktik 13,S. 55–70

Wittmann, E. (1995): Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In: Müller, G. & Wittmann, E. (Hrsg): Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 528-521. Hildesheim

Wittmann, E. (1988): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zur Lehrerbildung 16(3), S. 329-342)

Wussing, H. (2008): 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 1. Von den Anfängen bis Leipzig und Newton. Berlin: Springer

7 Anhänge

7.1 Lernumgebung 1: Binomische Formeln

Eingefügt ist die mit dem Satzprogramm Latex layoutete Lernumgebung zu den binomischen Formeln. Sie umfasst zwei Arbeitsblätter für Schülerinnen und Schüler zu den binomischen Formeln. Die erste heisst "Malkreuze und Flächen, die zweite heisst "Muster an der 1x1 Tafel". Ausserdem enthält der Text Informationen für Lehrpersonen. Die darin enthaltene Lernumgebung "Muster an der 1x1-Tafel" ist eine Variation einer Idee von Tschopp und Hengartner in Hirt, Wälti (2008).

Lernumgebungen zu den binomischen Formeln

Die Fachmittelschule des Kantons Basel-Land ist ein dreijähriger Bildungsgang der zum Fachmittelschulzeugnis führt. Dabei entspricht die 1.FMS dem 10. Schuljahr.

Zu Beginn der Mathematikausbildung werden typischerweise Themen aus der Sekundarstufe 1 wiederholt, darunter auch die binomischen Formeln. Im 11. Schuljahr (2. FMS) stehen u.a. quadratische Gleichungen auf dem Lehrplan. In der 3. FMS werden u.a. Wachstumsvorgänge und zum Teil Folgen behandelt.

Die folgenden Lernumgebungen können deshalb in allen drei Jahren curricular sinnvoll eingesetzt werden (siehe den Abschnitt *Weiterführende Aktivitäten*).

Zentral ist das Zusammenspiel von arithmetischen, algebraischen und geometrischen Aspekten der binomischen Formeln, oder allgemeiner: des Distributivgesetzes. Die Darstellung von Klammerausdrücken durch Rechtecksflächen hat eine lange Tradition (siehe den Abschnitt *Weiterführende Aktivitäten*) und wird auch im Zahlenbuch und mathbu.ch, den im Kanton obligatorischen Lehrmitteln, zentral verwendet: zum Beispiel mit mathbu.ch 8, Lernumgebung 21 und 22 zu negativen Zahlen und Binomen.

Die hier vorgeschlagenen Lernumgebungen sind direkt anschlussfähig an die Behandlung im mathbu.ch – können aber auch sehr gut von Schülerinnen und Schülern verstanden werden, die die Themen auf andere Art behandelt haben.

Im Fokus der 1. Lernumgebung steht das Begreifen mathematischer Darstellungen und das Argumentieren.

Bei der zweiten Lernumgebung steht das Erforschen und Explorieren und das Modellbilden im Vordergrund.

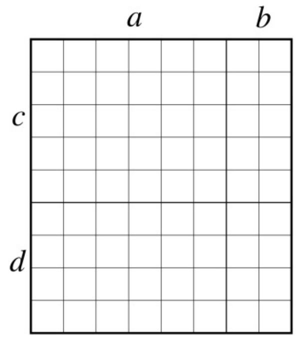
Lernumgebung Malkreuze und Flächen

Eine typische Rechnung in der Algebra ist

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd \tag{0.1}$$

In diesem Abschnitt geht es um eine geometrische Interpretation der Formel (0.1). Dabei wird klar, wie sich obige Formel begründen lässt. Schönes Nebenprodukt sind die Rechenregeln für Multiplikationen mit negativen Zahlen und die binomischen Formeln.

Malkreuzrechnungen



Auftrag: Binome multiplizieren Im Rechteck links ist $a = 6$, $b = 2$, $c = 5$ und $d = 4$.
Die vier Teilflächen und die Gesamtfläche lassen sich durch die folgenden vier Multiplikationen am Malkreuz veranschaulichen.

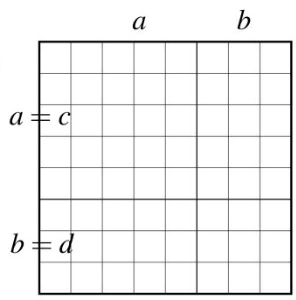
$\cdot$	6	2	
5			
4			
			72

Füllen Sie zunächst die Felder im Malkreuz aus – und markieren Sie (farblich gleich) im Rechteck und im Malkreuz, welche Ergebnisse zu welchen Flächen passen.

Überlegen Sie sich mit Hilfe der Beziehung von Rechteckfläche und Malkreuz, dass die Formel (0.1) gilt – und wie Sie das einem Achtklässler erklären könnten.

Weitere konkrete Zahlenbeispiele können helfen.

Formulieren Sie dann die Begründung für den Achtklässler. Gegebenenfalls auch mit Hilfe von Skizzen.



Auftrag Erste binomische Formel Ein Spezialfall des letzten Auftrags. Hier ist $a = c = 5$ und $b = d = 3$. Erklären Sie damit die erste binomische Formel:

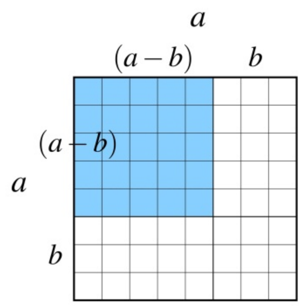
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Wieder müssen Sie sich die Beziehung der Flächen der Teilrechtecke und der Multiplikation der Variablen klar machen.

Die beiden folgenden Aufträge fordern und fördern ein wesentlich tieferes Verständnis - es braucht einen Umgang mit negativen Zahlen. Im mathbu.ch wird auf diese Art eine Erklärung der Multiplikation negativer Zahlen vorgeschlagen. Es ist insofern reizvoll, die für die meisten Schülerinnen und Schüler notwendige Wiederholung der Rechnungen mit negativen Zahlen mit dieser Lernumgebung anzusetzen. Der Zeit- und Erklärungsbedarf sollte aber nicht unterschätzt werden.

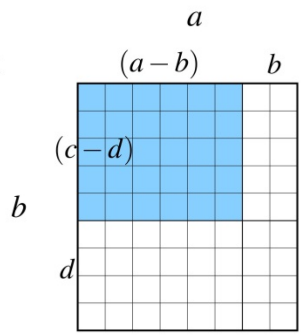
Auftrag: Zweite binomische Formel Hier sind die Bezeichnungen anders: a ist jetzt die Kante des grossen Quadrats, das linke obere Quadrat (gefärbt) hat also die Fläche $(a-b)^2$.
Erklären Sie damit die zweite binomische Formel:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Auftrag: Multiplikation negativer Zahlen
Gefärbt ist die Multiplikation $(a-b)\cdot(c-d)$. (In diesem Bild ist $a=8$, $c=9$.)
Das zugehörige Malkreuz ist also

$\cdot$	8	-2	
9			
-4			
			30



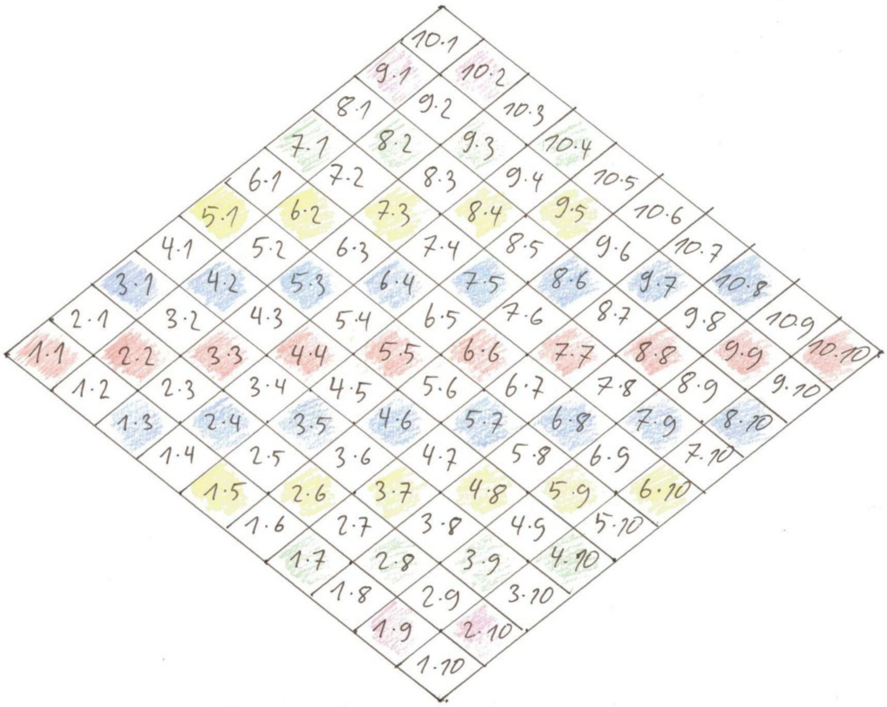
Damit lässt sich einem Achtklässler begründen, warum die Multiplikation einer negativen mit einer positiven Zahl ein negatives Resultat hat. Und warum das Ergebnis der Multiplikation zweier negativer Zahlen positiv ist.

Lassen Sie sich Zeit mit den Überlegungen. Finden Sie weitere Beispiele und verstehen Sie die Zusammenhänge gründlich.

Formulieren Sie dann die Begründung für den Achtklässler. Gegebenenfalls auch mit Hilfe von Skizzen.

Lernumgebung Muster an der 1x1 Tafel

Auftrag: 1x1 Tafel In der Graphik sind alle Aufgaben des Einmaleins dargestellt. Es sollen einige Muster, die auftreten, näher betrachtet werden. Für eine Begründung können die Rechtecke, die in den ersten Aufträgen bearbeitet wurden, helfen.



a) Auf der mittleren horizontalen Linie stehen die Quadratzahlen (rot). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den genau darüber/darunter befindlichen Aufgaben (zum Beispiel $6 \cdot 6$ und $7 \cdot 5$, blau). Was fällt auf? Können Sie das begründen?

b) Im ersten Auftrag haben Sie sich von den Quadraten um eine Raute nach oben/unten bewegt.

Was ergibt sich, wenn Sie um zwei Rauten nach oben/unten gehen? Oder um 3, oder um noch mehr? Probieren Sie einige Rechnungen durch. Versuchen Sie, Regelmässigkeiten zu erkennen. Formulieren Sie Ihre Feststellungen.

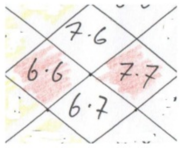
c) Versuchen Sie Gründe für die Regelmässigkeiten zu finden.

Weiterführende Aktivitäten

1.FMS

Hier kann es um die Algebraisierung der Situation gehen. Geeignete weiterführende Aufgaben sind:

a) Betrachtet werden Rauten mit vier Zahlen, wie nebenstehend.



Vergleichen Sie jeweils die Summe aus der oberen und unteren Aufgabe ($7 \cdot 6$ und $6 \cdot 7$) mit der Summe der nebeneinanderliegenden Zahlen ($6 \cdot 6$ und $7 \cdot 7$). Was stellen Sie fest, wenn sie verschiedene Beispiele berechnen? Können Sie das begründen?

b) Betrachten Sie waagerechte Reihen von Aufgaben. Zum Beispiel $3 \cdot 1$; $4 \cdot 2$; $5 \cdot 3$; .... Finden Sie eine Regelmässigkeit? Können Sie eine Formel finden?

c) Gehen Sie analog mit senkrechten Reihen, den Spalten, vor.

d) Wählen Sie ein beliebiges Feld. Betrachten Sie die vier Felder, die jeweils eine Kante gemeinsam haben mit dieem Feld:
Zu $3 \cdot 7$ sind $3 \cdot 6$, $3 \cdot 8$, $2 \cdot 7$ und $4 \cdot 8$ benachbart. Die Summe der 4 Nachbarfelder ist das Vierfache des Feldes: $3 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 84 = 4 \cdot (3 \cdot 7)$. Ist das immer so, warum?

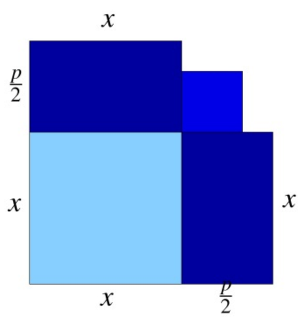
Die erste Aufgabe führt auf den Vergleich von $x^2 + (x+1)^2$mit $2x(x+1)$, die zweite auf $a(b+n)$, also jeweils auf eine Zunahme von $a \cdot n$.

Auch bei den anderen Aufgaben lassen sich ähnliche Algebraisierungen finden.

2. FMS

Die Aufgabenserie ist tauglich als Einstieg in die quadratischen Gleichungen: Wiederholung der binomischen Formeln aus der Sekundarstufe 1 in einem etwas anderen Kontext als üblich.

Wertvoll ist hier die Betonung der Begründungen mit Rechtecken: Zentral ist die quadratische Ergänzung und diese lässt sich gut darstellen: Man sieht, dass rechts oben ein Quadrat der Grösse $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ stehen sollte, es steht aber nur die Fläche q zur Verfügung.



Interessanterweise wurden im antiken Griechenland quadratische Gleichungen auf diese Art betrachtet. Al-Hwarizmi hat dies in seinem Buch «al-kitab al-muhtasar fi hisab *al-gabr* wa-l-muaqbala» (übrigens die Herkunft des Wortes Algebra) um 800 n. Chr. zusammengefasst: Als Beweise wurden bis zur Jahrtausendwende nur geometrische Überlegungen akzeptiert. Erst in der weiterschreitenden arabischen Mathematik haben sich die Wissenschaftler davon gelöst: Der Ansatz mit den Rechteckflächen gibt also ein schönes Beispiel genetischer Mathematik und auch die Gelegenheit, Geschichte der Mathematik in den Unterricht einzubauen. Als Quelle bietet sich das folgende Buch an:
Wussing, H. (2008): 6000 Jahre Mathematik. Heidelberg. Springer

Schliesslich ist es möglich, die Ergebnisse graphisch darzustellen und so einen Einstieg in quadratische Funktionen zu finden.

3. FMS

Ein mögliches Thema sind hier die Folgen: Diagonal ergeben sich arithmetische Folgen, waagrecht arithmetische Folgen 2. Ordnung und vertikal auch. Hier kann schön das Aufstellen von expliziten und rekursiven Formeln geübt werden. Unter diesem Fokus sind ähnliche Aufgaben wie bei der 1. FMS möglich.

Ein weiteres Thema in der 3. FMS sind Wachstumsvorgänge. Die 1x1-Tafel liefert Beispiele für lineares und, insbesondere auf den Vertikalen, nicht ganz einfache Beispiele für quadratisches Wachstum.

Test

Werden die Aufgaben zur ersten und zweiten binomischen Formel im Unterricht bearbeitet, so lässt sich die Lernumgebung auch als Test einsetzen: den Schülerinnen und Schülern muss viel Zeit gegeben werden.

Genügende Noten lassen sich erzielen, wenn Vermutungen (auch umgangssprachlich) aufgestellt werden und mit Beipielen belegt werden.

Algebraisierungen und geometrische Begründungen werden eher selten angestellt werden. Auch wird nicht unbedingt erkannt, dass es sich um die dritte binomische Formel handelt. Solche Erkenntnisse können zu guten bis sehr guten Noten führen.

7.2 Lernumgebung 2: Treppenzahlen

Die Mit Latex erstellte Lernumgebung zu den Treppenzahlen.

Lernumgebungen zu Treppenzahlen

Die Fachmittelschule des Kantons Basel-Land ist ein dreijähriger Bildungsgang der zum Fachmittelschulzeugnis führt. Dabei entspricht die 1.FMS dem 10. Schuljahr.

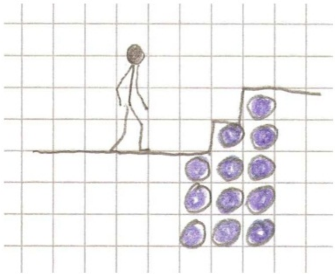
Zu Beginn der Mathematikausbildung werden typischerweise Themen aus der Sekundarstufe 1 wiederholt Hier kommen auch Termbildungen aus arithmetischen Zusammenhängen sinnvollerweise vor. In der 3. FMS werden teilweise Folgen behandelt.

Die folgenden Lernumgebungen können deshalb in diesen beiden Jahren curricular sinnvoll eingesetzt werden (siehe den Abschnitt *Weiterführende Aktivitäten*). Die Lernaufgabe kann aber im Sinne einer Förderung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen auch allein stehen.

Zentral ist das Zusammenspiel von ikonischen, arithmetischen und algebraischen Darstellungen – wobei die arithmetischen überwiegen werden. Das Explorieren und Erforschen steht im Mittelpunkt der Lernumgebung. Wichtig sind aber auch das Argumentieren und die Verwendung mathematischer Darstellungen. Die Aufgabe zeichnet sich durch eine sehr tiefe Einstiegshürde aus – es braucht ausser Grundrechenfertigkeiten keinerlei Voraussetzungen. So kann jeder Zusammenhänge herausfinden. Die Lernumgebung ist somit prinzipiell von der Primarschule bis ins Studium einsetzbar. Mögliche Zusammenhänge:

- Die Bearbeitung beginnt bei einer Liste der ersten Treppenzahlen, gegebenenfalls mit allen Möglichkeiten eine konkret gegebene Zahl darzustellen.
- Welche Zahlen sich als Summe von 2, 3, 4 oder 5 Zahlen darstellen lässt, stellt dann eine nächste Erkenntnis dar – anschlussfähig ist dort die explizite und rekursive Beschreibung von Folgen. Eine Verallgemeinerung auf die Summe von n Zahlen ist nicht zu erwarten. Begründungen sind in diesem Problemkontext gut möglich
- Potenzen von 2 lassen sich nicht als Treppenzahlen darstellen. Die Beobachtung ist elementar, ein Beweis mit elementaren Mitteln möglich, aber jenseits der Erwartungen auch an sehr gute Schülerinnen und Schüler.
- Schliesslich bleibt der Satz von Sylvester: die Zahl der Treppendarstellungen entspricht der Zahl der ungeraden Teiler Minus 1. Die Zahl der Teiler der Zahl zu untersuchen ist nicht naheliegend, sich auf die ungeraden Teiler zu beschränken schon gar nicht: kaum eine Schülerin oder Schüler wird sich in diese Richtung bewegen.

Lernumgebung: Treppenzahlen



Manche Zahlen lassen sich als Summe von aufeinander folgenden Zahlen schreiben. Beispiele:

$9 = 2+3+4$ Treppe mit drei Stufen

$9 = 4+5$ Treppe mit zwei Stufen

$8 = ?$

Was können Sie alles über Treppenzahlen herausfinden?

Weiterführende Aktivitäten

Es folgen einige Impulse, wie die Aufgabe weiter ausgebaut werden kann. Sie sind bewusst nicht in die Aufgabe eingebaut worden, um dem Experimentieren breiten Raum zu geben. Mit diesen Impulsen geht es mehr um die Kompetenzen Modellieren und Argumentieren und Begründen. Sinnvoll bei der Lernumgebung selber ist es jedoch, dass die Schülerinnen und Schüler versuchen, sich Forschungsfragen zu stellen. Da dies als schwierig einzustufen ist, kann eine Lehrperson Schülerinnen und Schülern, die sich in Richtung einer der unten stehenden Aufgaben bewegen, die Aufgabe als Forschungsfrage geben.

- Stellen Sie möglichst alle Zahlen von 1 bis 30 als Treppenzahlen dar.
- Welche Zahlen lassen sich nicht so schreiben? Formulieren Sie eine Vermutung, welche Zahlen auch über 30 sich nicht als Summe aufeinanderfolgender Zahlen darstellen lassen. (Ein Beweis ist nicht gefragt)
- Bei welchen Zahlen bis 30 gibt es mehrere Möglichkeiten? Finden Sie möglichst alle Möglichkeiten. (Hier hilft es, Ihre Beispiele systematisch zu notieren.)
- Lässt es sich einer Zahl (auch über 30) ansehen, ob sie sich als Summe von 2 Zahlen darstellen lässt? Welche Zahlen lassen sich als Summe von drei Zahlen darstellen? Welche als Summe von vier Zahlen? Und fünf Zahlen? Notieren Sie Ihre Überlegungen.
- Beschreiben Sie ein möglichst systematisches Vorgehen: wie lässt es sich einer Zahl ansehen, ob sie sich als Summe von n Zahlen schreiben lässt? (Notieren Sie Ihre Beobachtungen – jeder Ansatz ist hilfreich.
- Lässt sich einer Zahl ansehen, wie viele «Treppenzahldarstellungen» sie besitzt? (Tipp: Teiler der Zahl anschauen.)

1.FMS

Im weiteren Unterrichtsverlauf können Algebraisierungen angestrebt werden. Die erste Zahl ist x, die nächste $x+1$ und so weiter. Im Sinne einer Wiederholung des Sekundarschulstoffes kann dann die Summe der ersten n Zahlen berechnet werden – und dies kann verallgemeinert werden zu beliebigen Summen aufeinanderfolgender Zahlen.

3. FMS

Der Impuls, ob sich eine beliebige Zahl als Summe von n aufeinanderfolgenen Zahlen darstellen lässt (das kann mit n-Treppenzahl bezeichnet werden) führt auf eine niedrigste Zahl, und jeweils $a_k + n$ lässt sich wieder als n-Treppenzahl darstellen. So wird eine rekursive Darstellung erreicht. Für die Frage, ob eine beliebige gegebene Zahl eine n-Treppenzahl ist, braucht es dann eine explizite Beschreibung – ein möglicher Einstieg in das Thema Folgen.

Test

Werden in einer Klasse häufiger Lernumgebungen gestellt, so lässt sich dies auch für Tests verwenden. Da das Formulieren eigener Forschungsfragen erfahrungsgemäss schwierig ist, können die Impulse aus dem Abschnitt «weiterführenden Aktivitäten» als mögliche Forschungsfragen vorgegeben werden.

Genügende bis gute Leistungen zeichnen sich durch systematische Beispiele und konkrete Vermutungen aus.

Gute bis sehr gute Leistungen erfordern dann systematische Vermutungen und auch Begründungen.

Da die Impulse auf einem niedrigen Niveau beginnen und auch die Originallernaufgabe ein tiefes Einstiegsniveau hat, sollte es den meisten Schülerinnen und Schülern möglich sein, ansprechende Noten zu erzielen.

7.3 Fragebogen

Klasse: Name: Fragebogen zur Selbsteinschätzung

Liebe Schülerinnen und Schüler
Dieser Fragebogen steht im Zusammenhang mit zwei Aufgaben, die ich Ihnen im Laufe des Semesters stellen möchte. Ich möchte untersuchen, inwieweit es möglich ist, im Mathematikunterricht der FMS selbstständig zu experimentieren, sich also Sachverhalte zu erschliessen.
Ich möchte Sie bitten, Ihren Namen auf dem Fragebogen zu notieren, damit ich Antworten auf dem Fragebogen und Bearbeitungen der Aufgaben einander zuordnen kann. Die Auswertung erfolgt dann natürlich anonym. Auch die Lehrpersonen erfahren keine Ergebnisse einzelner Schülerinnen und Schüler
Torsten Linnemann, Herbstsemester 2011

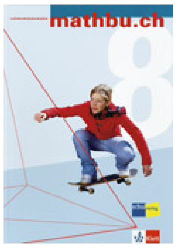
Erster Teil – Allgemeine Fragen

1	**An der FMS belege ich (voraussichtlich) den Schwerpunkt** G= Gesundheit, K=Kunst, P=Pädagogik, S=Soziales	G	K	P	S

	Hier geht es um Ihre persönlichen Einschätzungen und Gefühle. Bitte kreuzen Sie das Feld an, das am ehesten zutrifft. 1=trifft nicht zu, 2= trifft kaum zu, 3=trifft eher zu, 4= trifft genau zu				
2.1	Wenn sich Widerstände auftun, finde ich Mittel und Wege, mich durchzusetzen.	1	2	3	4
2.2	Die Lösung schwieriger Probleme gelingt mir immer, wenn ich mich darum bemühe.	1	2	3	4
2.3	Es bereitet mir keine Schwierigkeiten, meine Absichten und Ziele zu verwirklichen.	1	2	3	4
2.4	In unerwarteten Situationen weiss ich immer, wie ich mich verhalten soll.	1	2	3	4
2.5	Auch bei überraschenden Ereignissen glaube ich, daß ich gut mit ihnen zurechtkommen werde.	1	2	3	4
2.6	Schwierigkeiten sehe ich gelassen entgegen, weil ich meinen Fähigkeiten immer vertrauen kann.	1	2	3	4
2.7	Was auch immer passiert, ich werde schon klarkommen.	1	2	3	4
2.8	Für jedes Problem kann ich eine Lösung finden.	1	2	3	4
2.9	Wenn eine neue Sache auf mich zukommt, weiss ich, wie ich damit umgehen kann	1	2	3	4
2.10	Wenn ein Problem auf mich zukommt, habe ich meist mehrere Ideen, wie ich es lösen kann.	1	2	3	4

	Wie würden Sie sich selbst anhand folgender Angaben einschätzen? 1=fast nie, 2= manchmal, 3=oft, 4= fast immer				
3.1	Ich bin sicher, dass ich auch den schwierigsten Stoff in Unterrichtstexten verstehen kann	1	2	3	4
3.2	Ich bin überzeugt, dass ich auch den kompliziertesten Stoff, den der Lehrer vorstellt, verstehen kann.	1	2	3	4
3.3	Ich bin überzeugt, dass ich in Hausaufgaben und Klassenarbeiten gute Leistungen erzielen kann	1	2	3	4
3.4	Ich bin überzeugt, dass ich die Fertigkeiten, die gelehrt werden, beherrschen kann.	1	2	3	4

Zweiter Teil – Fragen zur Mathematik

4	**Meine Lehrperson an der Sekundarschule hat viel das Mathbu.ch eingesetzt.** 1=trifft nicht zu, 2= trifft eher nicht zu, 3= trifft eher zu, 4= trifft zu 	1	2	3	4
5	**Nach der FMS brauche ich die Mathematik vermutlich** 1= nicht, 2= eher wenig, 3= eher viel, 4= viel	1	2	3	4
6	**Meine Motivation im Mathematikunterricht ist** 1= klein, 2= eher klein, 3= eher gross, 4= gross	1	2	3	4

	Wie würden Sie sich selbst anhand folgender Angaben einschätzen? 1=trifft nicht zu, 2= trifft eher nicht zu, 3=trifft eher zu, 4= trifft zu				
7.1	In Mathematik bin ich sicher, dass ich auch den schwierigsten Stoff verstehen kann.	1	2	3	4
7.2	Ich bin überzeugt, dass ich auch den kompliziertesten Stoff, den der Lehrer in Mathematik vorstellt, verstehen kann.	1	2	3	4
7.3	Ich bin überzeugt, dass ich in Hausaufgaben und Prüfungen in Mathematik gute Leistungen erzielen kann.	1	2	3	4
7.4	Ich bin überzeugt, dass ich die Fertigkeiten, die in Mathematik unterrichtet werden, beherrschen kann.	1	2	3	4

	Wie sicher glauben Sie, folgende Mathematikaufgaben lösen zu können? 1=gar nicht sicher, 2= nicht sehr sicher, 3=sicher, 4= sehr sicher				
8.1	Anhand des Zugfahrplanes ausrechnen, wie lange die Fahrt von einem Ort zu einem andern dauern würde.	1	2	3	4
8.2	Ausrechnen, wie viel billiger ein Fernseher bei 30% Rabatt wäre.	1	2	3	4
8.3	Ausrechnen, wie viele Quadratmeter Fliesen du bräuchtest, um einen Fussboden damit auszulegen.	1	2	3	4
8.4	Diagramme in Zeitungen verstehen.	1	2	3	4
8.5	Eine Gleichung wie $3x+5=17$ lösen.	1	2	3	4
8.6	Auf einer Karte im Massstab 1:10'000 die tatsächliche Entfernung zwischen zwei Orten bestimmen.	1	2	3	4
8.7	Eine Gleichung wie $2(x+3)=(x+3)(x-3)$ lösen.	1	2	3	4
8.8	Den Benzinverbrauch eines Autos berechnen.	1	2	3	4

7.4 Kategoriensystem von Leuders, Naccarella Philipp

Das Kategoriensystem aus Leuders, Naccarella, Philipp (2011)

Kodeliste

Vorgehensweise / Kode	Kodenotiz / Beispiel
Antwort-hypothese	Eine Hypothese wird als Antwort auf einen Impuls/eine Frage formuliert. Bezieht sich auf die äußere Form der Generierung und kann mit anderen hypothesenspezifischen Kodes zusammen auftreten.
	I: „Gibt's denn noch andere Zahlen die man nicht „gießen“[1] kann?“ P: „Ja, alle Ungeraden.“
Hypothese formulieren	Eine Vermutung wird formuliert. Dieser Kode ist dann zu vergeben, wenn keiner der spezifischeren hypothesenorientierten Kodes zugeordnet werden kann.
	„Ich denke, es werden immer Vielfache von einundneunzig sein“
Folgehypothese	Bereits bestehende Hypothese wird übertragen (Transferleistung - bis hin zur Verallgemeinerung) bzw. abgeleitet.
	Überlegungen über 3-Ecke werden auf 4-Ecke übertragen.
Spezifizierungs-hypothese	Bereits bestehende Hypothese wird genauer / schärfer formuliert.
	Hyp. 1: „Wenn unten nicht 0 stehen müsste haben wir unendlich viele Mögichkeiten. für Zahlen in der mittleren Ebene.“ Hyp. 2: „Ja, aber es müssen zwei verschiedene Zahlen sein.“
Beispiel-orientierte Hypothese	Hypothese wird direkt in Anknüpfung an ein Beispiel gebildet.
	„Weils ein Dreieck ist, da kann man nicht so einen Strich rein machen. Es muss mindestens ein Viereck sein.“
Ad-hoc-Hypothese	Hypothese wird intuitiv formuliert und als Grundlage/Anker für weitere Überlegungen genutzt.
	„Geht nur bei geraden Zahlen“; „spontan: 9“
Hypothese verwerfen	Eine Vermutung wird verworfen. Das Verwerfen der Vermutung wird häufig nicht explizit formuliert aber daran deutlich, dass nicht wieder auf die Vermutung zurückgegriffen wird.
	„Nein stimmt, also stimmt nicht, was ich mir gerade überlegt habe.“
Bestätigungsbeispiel	Beispiel wird genutzt, um Vertrauen in eine Vermutung zu gewinnen.
	„Die Quadratzahlen gehen nicht (als Treppenzahl).“ Probiert die 16.
Gegenbeispiel	Beispiel wird genutzt, um eine Vermutung zu verwerfen oder genauer zu spezifizieren.
	„die 10 geht auch als Treppenzahl – also gehen auch gerade Zahlen als Treppenzahlen“
Begründung	Versuch einer Begründung - oft beispielorientiert. Im Begründungsversuch kann (muss aber nicht zwingend) eine latente Beweisidee vorhanden sein. Begründung können auch Überlegungen sein, die zu Hypothesen führen.
	„Ich habe nie zwei Ecken oder eine Ecke. Also, es kann keine Gleichung geben mir "zwei" oder "eins"... „
Beispiel generieren	Ein Beispiel wird generiert, ohne dass eine der anderen Beispielgenerierungsstrategien zugeordnet werden kann, quasi "irgendein Beispiel" (ad hoc).
	„Kann man jetzt nicht z.B. 12 nehmen oder so?“
Besonderes Beispiel	Beispiel wird unter bestimmten Gesichtspunkten betrachtet und ist subjektiv besonders. Beispielsweise unter ästhetischen Gesichtspunkten (Schönheit), Grenzfälle, "einfaches" Beispiel, typisches Beispiel etc.
	„53 ist ne schön ungerade Zahl“
Allgemeines	Es wird versucht, ein Beispiel so verallgemeinert darzustellen, dass Strukturen

[1] Ein Bäumchen „gießen“ bedeutet hier, dass bei einer multiplikativen Zerlegung einer Zahl zwei neue Zahlen aus ihr „wachsen“.

Beispiel	deutlich hervortreten.
	beliebiges *n*-Eck
Großes Beispiel	Ein Beispiel mit einer großen Zahl soll generiert werden. "groß" ist sehr subjektiv.
	„mach mir mal eine hoch, 80“
Kleinstes Beispiel	Proband wählt ein kleinstes mögliches Beispiel als Ausgangspunkt für Überlegungen. Bedeutend ist hier die Betrachtung des Grenzfalls.
	„1,2,3, die kleinste 3er Treppe“
Reihenfolgebeispiel	Beispiele werden in systematischer Reihenfolge ausprobiert.
	Die Zahlen von 1 bis 20 als Zahlenbäume darstellen.
Umgebungsbeispiel	Die Nachbarelemente eines Beispiels werden betrachtet. Nachbarelemente liegen in der näheren Umgebung eines Beispiels (müssen nicht direkt benachbart sein). (Im Gegensatz zum *Reihenfolgebeispiel* liegt hier ein Beispiel stärker im Fokus.)
	(Hyp.: größere Zahlen kann man häufiger „gießen“) Zahlenbaum 50 => 51/49
Vollständigkeitssuche	Es werden alle Möglichkeiten in einem Beispielbereich gesucht.
	„Auf wie viele verschiedene Weisen kann ich ein 4-Eck mit einem Schnitt in zwei Teile schneiden?“
Eigenschaften identifizieren	Einem Beispiel wird eine bestimmte (mathematische) Eigenschaft zugewiesen.
	„ 8 ist eine (…) gerade Zahl“
Struktursuche	Motor der Suche sind vermutete Strukturen, die in der Betrachtung von einem oder mehreren Beispielen gesucht werden.
	„Aber also, wenn ich mich auf zwei begrenze, ist es halt eigentlich am einfachsten, eine Struktur zu finden.“
Beispiele sortieren	Beispiele werden geordnet / sortiert. Sortieren kann auch mental sein. Beispiele, die bereits generiert wurden, werden nochmal betrachtet.
	Rechnungen nach Ergebnissen geordnet (IRI-RIR)
Gruppenbildung	Strukturierung des Beispielbereichs.
	„kleine – mittlere – große Zahlen haben unterschiedlich viele Teiler“
Stellvertreter-beispiel	Einzelnes Beispiel wird exemplarisch für eine ganze Gruppe verwendet. Zuvor muss eine *Gruppenbildung* erfolgt sein.
	6 als Stellvertreter für gerade Zahlen.

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäss aus Quellen entnommen wurden, habe ich als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass andernfalls der Senat gemäss Art. 20 des Statuts der Universität Bern vom 17. Dezember 1997 zum Entzug des aufgrund dieser Arbeit verliehenen Abschlusses berechtigt ist.

Basel, im Mai 2012

Torsten Linnemann