

Grundvorstellungen zum Bruchrechnen



Warum nicht nur Dezimalzahlen?

Verhältnisse kommen oft vor. 1024x768 Pixel

Wahrscheinlichkeitsrechnung: 5 von 8 Kugeln sind weiss

Auflösung von Gleichungen: keine Rundungsfehler. Ansonsten Probleme mit nicht lösbaren Gleichungen.

Absolute Genauigkeit: Ein bisschen ähnlich wie der Vorteil von Konstruktionen gegenüber berechneten Zeichnungen in der Geometrie

$(1/7) \cdot (3/8) = 3/56$ ist einfach zu rechnen, als Dezimalzahl nur mit Taschenrechner

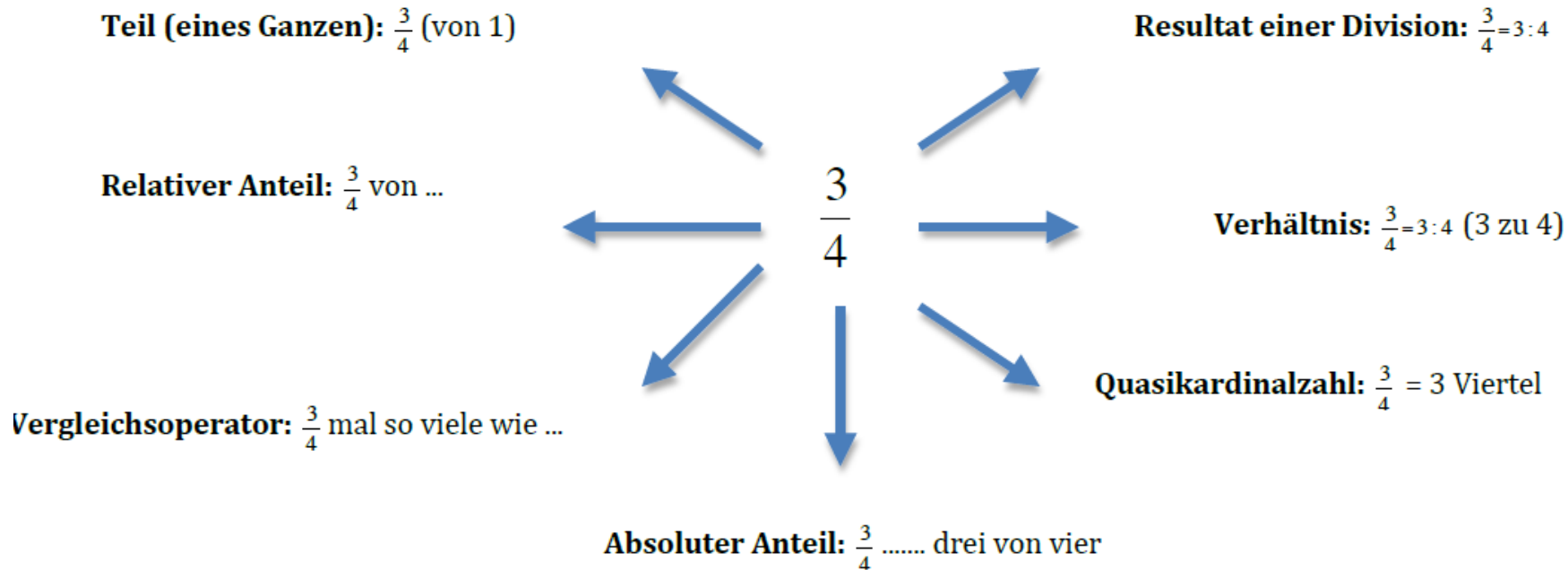
Dezimalzahlen sind wichtig, immer wenn es um Messungen geht. Parallel unterrichten – nicht in diesem Modulanlass. Zweite Hälfte in Padberg (2009)

Grundvorstellung zum Bruchbegriff

- gemäss Wikipedia:
- Anteils-Vorstellung (Bruch als Teil eines Ganzen, als Teil mehrerer Ganzer): $\frac{3}{4}$ von einer Pizza oder $\frac{1}{4}$ von 3 Pizzen.
- Operator-Vorstellung (Bruch als multiplikative Rechenanweisung): Der Gewinn beträgt $\frac{3}{4}$ von 120 Euro (Rechenoperation wird auf dem Bruch angewendet).
- Verhältnis-Vorstellung (Bruch als (Mischungs-)Verhältnis): Apfelsaft und Wasser werden im Verhältnis 3:4 zu Apfelschorle gemischt.

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen:

(nach Malle 2004)



Römer, 2011

Bruchzahlaspekte

1. Teil vom Ganzen: Bruch als Teil eines Ganzen (3 Teile einer Viertel Pizza), Bruch als Teil mehrerer Ganzer (3 Pizzen auf vier Leute verteilen). Wichtig: Gleich mehr dazu.
2. Masszahl: $\frac{3}{4}$ h, $\frac{1}{2}$ km – Nahe an Anwendungen. Guter Rückgriff auf Vorstellungen. Schwierig: Multiplikation, Division – nicht mehr innerhalb der Einheiten machbar.
3. Operatorkonzept: $\frac{3}{4}$ heisst: erst Mal drei, dann durch 4. Konsistenter Aufbau der Bruchrechnung. War in 70er/80er Jahren teilweise das Hauptmodell, ist aber sehr theoretisch. Wertvoll bei $\frac{3}{4}$ von 8 – so auch anschaulich.
4. Verhältnis: Wahrscheinlichkeiten, Massstäbe, Spielergebnisse. Damit aber kein Aufbau des *Bruchrechnens*.

Padberg, 2009

Bruchzahlaspekte II

5. Quotient: Resultat von Divisionsaufgaben: 3 Äpfel an 4 Personen verteilen, wie oft ist eine 4m lange Strecke in 3m langen Strecken enthalten.
6. Gleichungskonzept: $\frac{7}{3}$ ist die Lösung der Gleichung $3x=7$. Addition von $\frac{7}{3}$ und $\frac{3}{5}$ durch Gleichungen: $3x=7$, $5y=3$. Äquivalenzumformung bzw. Erweitern $15x=35$, $15y=9$, also $15(x+y)=44$. Mithin $x+y=\frac{44}{15}$.
Sehr formal.
7. Skalenwert: Zahlenstrahl, Tankanzeige: wichtige beim Verständnis der Brüche als Zahl.
8. Quasikardinalität: $\frac{m}{n}$ als «m Mal $\frac{1}{n}$ »
9. Äquivalenzklassenkonzept: alle Bezeichnungen $\frac{m}{n}$ zusammenfassen, wenn $m*b=n*a$. Auch das ist sehr formal.

Schule: Konzentration auf zwei Grundvorstellungen

1 Anteilsvorstellung – Wichtig bei der Einführung

2 Operatorvorstellung – unbedingt notwendig bei der Multiplikation

Eher weniger

Verhältnisaspekt. Damit lässt sich das Bruchrechnen schlecht aufbauen

(Padberg 2017)

Anmerkung: Gemäss Hansruedi Kaiser ist der Verhältnisaspekt extrem wichtig in der Berufsbildung. Schade, wird dieser im Lehrplan 21 kaum abgebildet.

Anteilsaspekt

Vor Pia liegt ein Rechteck. Es ist in vier gleich große Teile unterteilt, drei davon sind blau. Welcher Anteil des Rechtecks ist blau? (kontinuierlich)

2. Vor Pia liegen 4 Perlen, 3 davon sind blau. Welcher Anteil der Perlen ist blau? (diskret)

3. Vier Mädchen teilen sich gerecht (gleichmäßig) drei Pizzas. Welchen Anteil erhält jedes Mädchen? (Bruch als Anteil mehrerer Ganzer)

(Padberg, 2017)

Operatoraspekt

1. Färbe $\frac{3}{4}$ von dem Rechteck blau (kontinuierlich).
2. Lege $\frac{3}{4}$ von den 12 Perlen vor dir auf die linke Seite (diskret).

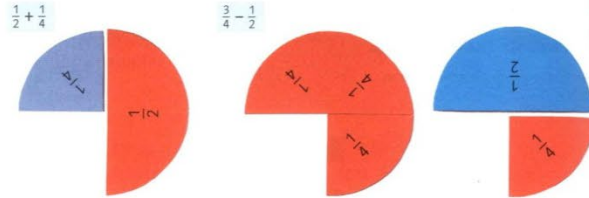
(Padberg, 2017)

Modelle für Brüche 2

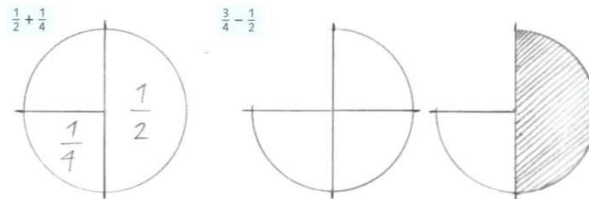
Vorstellung von Brüchen und vom Operieren mit Brüchen entwickeln

1 Erkläre jemandem in der Klasse, wie die Kinder vorgegangen sind.

A Anna legt mit ihren Bruchteilen.



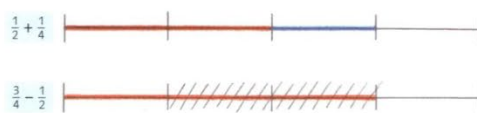
B Barbara arbeitet mit der Zeichenuhr.



C Christian benützt das Rechteckmodell auf unliniertem Papier.



D Demian wählt das Streckenmodell.



E Eric verwendet das Grössenmodell.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ h} + \frac{1}{4} \text{ h} = 30 \text{ min} + 15 \text{ min} = 45 \text{ min} = \frac{3}{4} \text{ h}$$

$$\frac{1}{2} \text{ m} + \frac{1}{4} \text{ m} = 50 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 75 \text{ cm} = \frac{3}{4} \text{ m}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ h} - \frac{1}{2} \text{ h} = 45 \text{ min} - 30 \text{ min} = 15 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ h}$$

$$\frac{3}{4} \text{ l} - \frac{1}{2} \text{ l} = 0,75 \text{ l} - 0,5 \text{ l} = 0,25 \text{ l} = \frac{1}{4} \text{ l}$$

2 Wähle zur Bearbeitung der folgenden Bruchrechnungen verschiedene Modelle:
- Legen mit Bruchteilen
- Darstellen mit der Zeichenuhr, im Rechteckmodell oder im Streckenmodell
- Übertragen ins Grössenmodell

A $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
B $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

3 Entscheide selber, wie du vorgehen willst.

A $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ B $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ C $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ D $\frac{3}{4} - \frac{1}{12}$ E $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

4 Versuche, auch solche Aufgaben mit einem Modell darzustellen.

$2 \cdot \frac{3}{4}$ $3 \cdot \frac{3}{6}$ $4 \cdot \frac{3}{8}$

5 Erfinde weitere Aufgaben. Stelle deinen Lösungsweg jeweils mit einem anderen Modell dar. Tauscht die Aufgaben untereinander aus und kontrolliert euch gegenseitig.



Anteile von ...

Anteile mit gebrochenen Zahlen darstellen



1 Stelle Anteile von 60 mit der Zeichenuhr im Kreismodell dar und bestimme sie.

- A $\frac{2}{5}$ von 60 B Stellt selber solche Aufgaben zusammen, bestimmt die Ergebnisse und gebt sie anern zum Üben.
 $\frac{2}{10}$ von 60
 $\frac{2}{12}$ von 60

2 Bestimme Anteile einer Anzahl mit Hilfe des Grössenmodells.

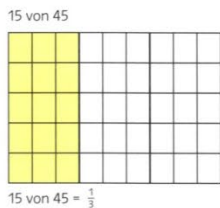
$\frac{6}{20}$ von 100
 $\frac{6}{20}$ von 1m = $\frac{6}{20}$ von 100cm = 30cm, $\frac{6}{20}$ von 100 = 30

$\frac{7}{8}$ von 1000
 $\frac{7}{8}$ von 1kg = $\frac{7}{8}$ von 1000g = 875g, $\frac{7}{8}$ von 1000 = 875

- A $\frac{9}{20}$ von 100 B Stellt selber solche Aufgaben zusammen, bestimmt die Ergebnisse und gebt sie anern zum Üben.
 $\frac{4}{10}$ von 1000
 $\frac{3}{8}$ von 1000

3 Bestimme Anteile einer Anzahl mit Hilfe des Rechteckmodells. Zeichne dazu geeignete Rechtecke auf Häuschenpapier und markiere den Anteil geschickt.

- A 18 von 27 B Stellt selber solche Aufgaben zusammen, bestimmt die Ergebnisse und gebt sie anern zum Üben.
 30 von 48
 48 von 64



4 Studiert die Informationen in der Randspalte. Erklärt einander durch Legen mit Plättchen, dass der Anteil 2 von 5 dem Anteil 4 von 10 entspricht und dass der Anteil 4 von 10 dem Anteil 6 von 15 entspricht.

5 Suche mehrere unterschiedliche Beschreibungen für den gleichen Anteil einer Anzahl.
 A 3 von 5 5 von 6 2 von 9
 B 9 von 12 18 von 24 24 von 36

6 Wie heisst die Zahl x?
 A $\frac{1}{2}$ von x ist 10 B $\frac{3}{10}$ von x ist 20
 $\frac{1}{3}$ von x ist 9 $\frac{4}{10}$ von x ist 24
 $\frac{1}{4}$ von x ist 8 $\frac{4}{5}$ von x ist 28
 $\frac{1}{5}$ von x ist 7 $\frac{6}{10}$ von x ist 30
 $\frac{1}{7}$ von x ist 5 $\frac{6}{7}$ von x ist 42
 $\frac{1}{8}$ von x ist 4 $\frac{7}{8}$ von x ist 56

7 Bestimme den entsprechenden Anteil x von 100.
 Der Anteil 1 von 2 entspricht dem Anteil x von 100.
 Der Anteil 4 von 5 entspricht dem Anteil x von 100.
 Der Anteil 7 von 10 entspricht dem Anteil x von 100.
 Der Anteil 9 von 20 entspricht dem Anteil x von 100.
 Der Anteil 15 von 25 entspricht dem Anteil x von 100.
 Der Anteil 20 von 50 entspricht dem Anteil x von 100.

8 Anteile einer unbekanntem Zahl
 Ich weiss, dass $\frac{4}{5}$ einer Zahl 12 ist. Wie viel ist dieser Zahl?
 Ich weiss, dass $\frac{3}{5}$ einer Zahl 12 ist. Wie viel ist dieser Zahl?
 Ich weiss, dass $\frac{3}{8}$ einer Zahl 12 ist. Wie viel ist dieser Zahl?
 Ich weiss, dass $\frac{2}{3}$ einer Zahl 12 ist. Wie viel ist dieser Zahl?
 Ich weiss, dass $\frac{3}{4}$ einer Zahl 12 ist. Wie viel ist dieser Zahl?
 Ich weiss, dass $\frac{4}{9}$ einer Zahl 12 ist. Wie viel ist dieser Zahl?

9 Stellt selber solche Aufgaben wie bei Nummer 5 bis 8 zusammen, bestimmt die Ergebnisse und gebt sie anern zum Üben.



Mit Brüchen rechnen
Übt immer wieder.

$\frac{2}{5}$ von 45

18

richtig

Aufgabe stellen

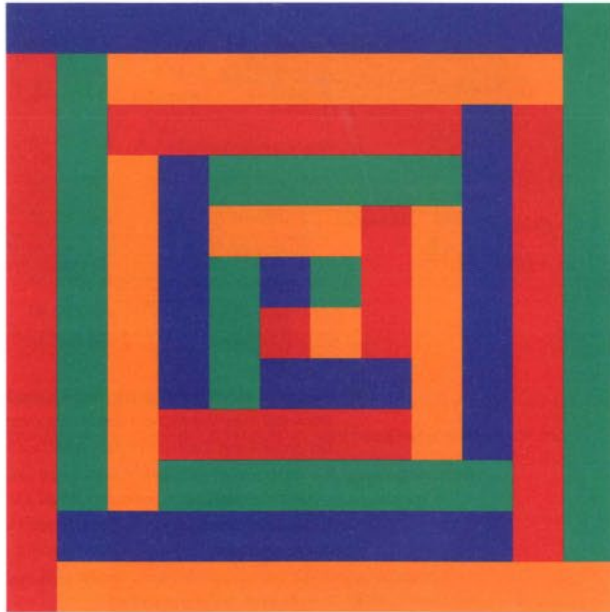
Ergebnis nennen

Künstler konstruieren

In Kunstwerken geometrische und kombinatorische Gesetzmässigkeiten erforschen



Richard Paul Lohse ist ein Schweizer Künstler. Er wurde 1902 in Zürich geboren. Dort machte er eine Lehre als Reklamezeichner. Viele seiner Bilder bestehen nur aus Quadraten und Rechtecken. Die Farbe war für ihn besonders wichtig. So sind die gleichmässige Verteilung der Farbmengen und die Anordnung der Farben bei vielen Bildern ein Konstruktionsprinzip. Von manchen Bildern stellte er Serien her und änderte lediglich die Reihenfolge der Farben. Viele Leute haben seine Kunst nicht verstanden. Erst in seinen letzten Lebensjahren fand er öffentliche Anerkennung. Er starb drei Tage nach seinem 86. Geburtstag in Zürich.



«Progression von 6 gleichen Gruppen»

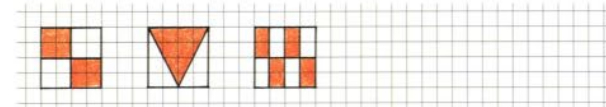
- 1 Schau dir das Bild an und schreibe auf, was du entdeckst.
- 2 Das Bild hat in Wirklichkeit eine Seitenlänge von 60 cm.
 - A Vergleiche die Seitenlänge der Abbildung mit der Seitenlänge des Originals. In welchem Massstab ist die Abbildung verkleinert?
 - B Berechne die Fläche des Originalbildes und die Fläche der Abbildung.
 - C Wie viele Abbildungen braucht es, wenn du das Originalbild überdecken möchtest?
- 3 A Zeichne das gleiche Bild ohne Farben mit einer anderen Seitenlänge auf kariertes Papier.
 B Nimm wie der Künstler die vier Farben Rot, Blau, Orange und Grün. Färbe dein Bild nach einer anderen Regel als der Künstler. Beschreibe deine Regel.

Padberg (2009), Kap III 4.4, Repräsentant und Bruch: mehrere Repräsentanten zeigen. Umsetzung in Zahlenbuch 6

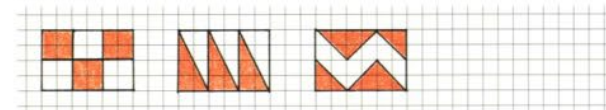


- 4 Nebenan siehst du eine einfachere Flächeneinteilung als die von Richard Paul Lohse. Das Quadrat ist in neun kleinere Quadrate unterteilt. Es werden drei Farben verwendet. Man hat darauf geachtet, dass die gleiche Farbe nie zweimal in der gleichen Zeile und nie zweimal in der gleichen Spalte vorkommt.
 - A Färbe das Bild mit den neun Quadraten und den Farben Rot, Blau und Orange anders. Beachte die obige Regel.
 - B Suche einige Möglichkeiten, wie du das Bild mit den Farben Rot, Blau, Orange und Grün nach obiger Regel ausmalen kannst. Vergleiche deine Lösungen mit den Lösungen deiner Kolleginnen und Kollegen.
 - C Übertrage obige Regel auf Flächen mit 16 Quadraten und vier Farben. Male ein Beispiel und vergleiche mit andern.

- 5 A Zeichne einige Quadrate auf kariertes Papier. Färbe die halbe Fläche der Quadrate auf verschiedene Weise. Hier siehst du einige Beispiele.

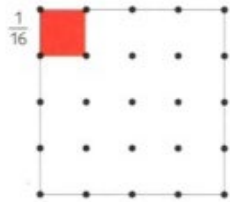


- B Zeichne und halbiere auf die gleiche Weise Rechtecke, die aus sechs Quadraten bestehen.



- 6 Zeichne Quadrate oder Rechtecke auf kariertes Papier. Unterteile sie so, dass du auf verschiedene Weise je einen Drittel mit einer anderen Farbe ausmalen kannst.
- 7 A Zeichne beliebige Flächen auf kariertes Papier. Unterteile sie so, dass du auf verschiedene Weise je einen Viertel, Fünftel, Sechstel... mit einer anderen Farbe ausmalen kannst.
 B Berechne die Flächen und Teilflächen deiner Zeichnungen in mm².
- 8 Zeichne gleich grosse Kreise. Unterteile sie so, dass du auf verschiedene Weise je einen Drittel, Viertel, Achtel, Zehntel mit einer anderen Farbe ausmalen kannst.

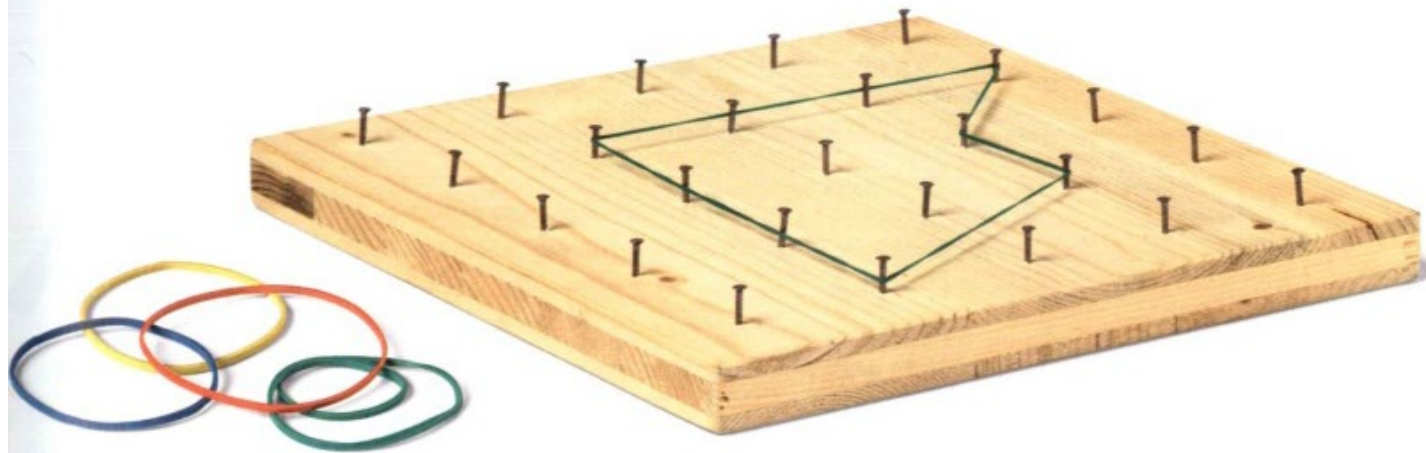
Zahlenbuch 6 – Repräsentanten eines Bruchs



Flächen

Die Fläche zwischen den 25 Nägeln nennen wir Einheitsfläche.
Sie besteht aus 16 kleinen Quadraten. Ein kleines Quadrat ist $\frac{1}{16}$ der Einheitsfläche.

- 8** Spannt einzelne Figuren und bestimmt ihre Flächen.
Überprüft gegenseitig eure Ergebnisse.
- 9** Spannt Figuren, welche ...
 - A $\frac{1}{2}$ der Einheitsfläche umfassen.
 - B $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$) der Einheitsfläche umfassen.
 - C $\frac{3}{4}$ ($\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}$) der Einheitsfläche umfassen.
- 10** Stellt euch weitere solche Aufgaben. Ihr könnt dazu wieder die Kopiervorlage benutzen.



6-7 Symmetrische Figuren herstellen

8-10 Flächen von Figuren als Anteil einer Einheitsfläche bestimmen

► Kopiervorlage

35

Padberg (2009), III, 4.8 und 6.4 - Grundvorstellungsumbrüche

- Kardinalzahlaspekt, Ordinalzahlaspekt natürlicher Zahlen verschwinden
- neue Zahlaspekte (Teil vom Ganzen, Verhältnis...)
- Es gibt keine Vorgänger, Nachfolger
- Zwischen zwei Brüchen liegen unendlich viele andere
- Es gibt keinen kleinsten positiven Bruch

Empfehlung: Padberg & Wartha (2017) stellen all dies ausführlich und lesenswert dar.

vom Hofe/Wartha

Bruchrechnung ist häufig der Beginn einer allgemeinen Entwicklung
«... Mathematik vorwiegend als isoliertes Kalkül- und Regelanwenden zu betreiben...»

Lehrplan 21 – Spiralcurriculum

Die Schülerinnen und Schüler können addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und potenzieren.

Was müssen alle nach der 6. Klasse können?

Was ist sowohl in der 6. als auch in der 7. Klasse ein Thema?

Was wird noch an der Sek I gemacht?

Lehrplan 21 – Spiralcurriculum: Die Schülerinnen und Schüler können addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und potenzieren.

○	<p>f</p> <ul style="list-style-type: none"> » können Dezimalzahlen bis 5 Wertziffern addieren und subtrahieren (im Kopf oder mit Notieren eigener Rechenwege, z.B. $30.8 + 5.6$). » können Brüche mit den Nennern 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 20, 50, 100 am Rechteckmodell kürzen, erweitern, addieren und subtrahieren. » können Grundoperationen mit dem Rechner ausführen. 	
	<p>g</p> <ul style="list-style-type: none"> » können Dezimalzahlen bis 5 Wertziffern multiplizieren und die Ergebnisse überprüfen (im Kopf oder mit Notieren eigener Rechenwege, z.B. $308 \cdot 52$; $12 \cdot 0,3$). » können Brüche mit den Nennern 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 20, 50, 100 am Rechteckmodell multiplizieren. » können Brüche mit den Nennern 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 20, 50, 100, 1'000 als Dezimalzahlen schreiben. » können bestimmen, wie oft Stammbrüche in ganzen Zahlen enthalten sind (z.B. Wie viele Male ist $\frac{1}{6}$ in 2 enthalten? $\rightarrow 2 : \frac{1}{6}$). 	
3	<p>h</p> <ul style="list-style-type: none"> » können Prozentrechnungen mit dem Rechner ausführen. » Erweiterung: können natürliche Zahlen in Primfaktoren zerlegen. 	
	<p>i</p> <ul style="list-style-type: none"> » können die Grundoperationen mit rationalen Zahlen ausführen. » können Wurzeln und Potenzen mit dem Rechner berechnen (z.B. $4^3 \cdot 4^3 = 4'096$; $4^3 + 4^3 = 128$; $\sqrt[3]{8000}$). » Erweiterung: können die Grundoperationen mit gewöhnlichen Brüchen mit Variablen ausführen und mit Zahlen belegen: $\frac{a+c}{b+d}$; $\frac{a-c}{b-d}$; $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; $a : \frac{c}{b} = \frac{a \cdot b}{c}$. 	
○		

Keine Division. Aber noch mal die Erinnerung

Achtung: Nur die Grundvorstellung «Aufteilen/passen in» ist tragfähig für das Dividieren mit gebrochenen Zahlen.

Was ist $20:0.5$?

Wir haben 20 Äpfel. Wie viele Teller braucht es, wenn auf jedem Teller 5 Äpfel liegen? 20 in 5er aufteilen. Jedes Kind bekommt 5 Äpfel

Wie oft passen 5 Äpfel in 20 Äpfel? $20:5=4$ (es reicht für 4 Kinder)

Wie oft passen 4 Äpfel in 20 Äpfel? $20:4=5$ (es reicht für 5 Kinder)

Wie oft passen 2 Äpfel in 20 Äpfel? $20:2=10$ (es reicht für 10 Kinder)

Nun isst jedes Kind nur einen halben Apfel:

Wie oft passen 0.5 Äpfel in 20 Äpfel? $20:0.5=40$ (es reicht für 40 Kinder)

Literatur

- Malle, G. (2004): *Grundvorstellungen zu Bruchzahlen*. Mathematik lehren 123, S. 4-8.
- Padberg, F. (2009): *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer.
- Padberg, F. und Wartha, S. (2017): *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer.
- Römer, M. (2011): *Brüche und Bruchrechnung*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/schule/schulentwicklung/Modellversuche_Schulversuche/SINUS-Grundschule-Berlin/materialien/rueckblick/roemer_brueche_sep_2011/Bruch.pdf