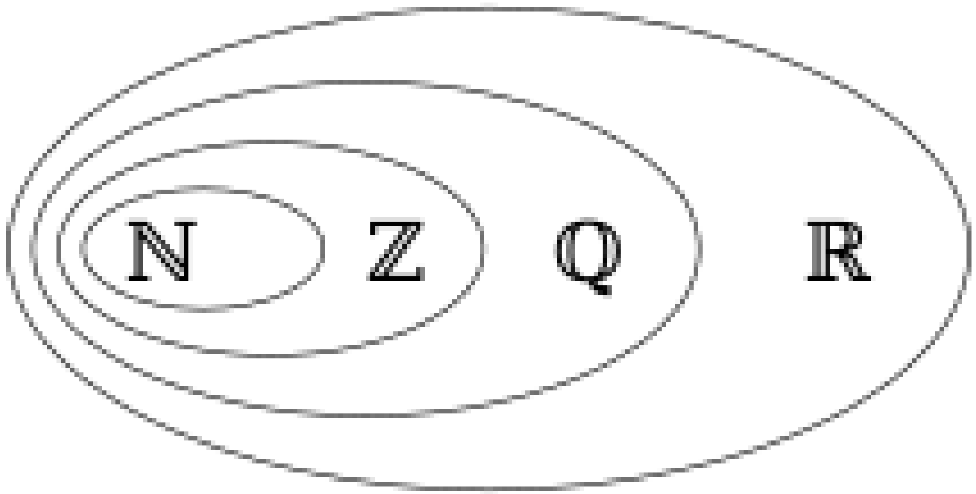
Fachhochschule Nordwestschweiz
Pädagogische Hochschule

Zahlbereiche

Torsten Linnemann

Zahlbereiche



(Wikipedia)

Die ganzen Zahlen

- Erweiterung auf die negativen Zahlen:
  Situation: Die Gleichung 7+x=5 hat keine Lösung, wenn x eine natürliche Zahl ist. Wir formen um zu 2+x=0 und definieren:
  -2 ist die Lösung der Gleichung 2+x=0. Und allgemein:

-n ist die Lösung der Gleichung n+x=0.

Die negativen Zahlen bilden zusammen mit den natürlichen Zahlen und der Null die ganzen Zahlen **Z.**

Also **Z**={...,-3,-2,1,0,1,2,3…}

Die ganzen Zahlen sind also eine Zahlbereichserweiterung der natürlichen Zahlen.

Die rationalen Zahlen

- Nun wollen wir die Gleichung 2*x=5 lösen:
  Die rationalen Zahlen sind alle Zahlen, für die ganze Zahlen p und q existieren, so dass q*x=p gilt. Wir schreiben x also p/q.

Das ist die nächste Zahlbereichserweiterung. Rationale Zahlen können auch negativ sein, in der Primarschule werden nur die positiven rationalen Zahlen betrachtet – dann sind in der Definition oben p und q natürliche Zahlen.

Die rationalen Zahlen, Eindeutigkeit

- Für die Zahlbereichserweiterungen brauchen wir noch, dass die Rechenregeln (Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und Distributivgesetz) weiter gelen. Dann lässt sich aber 4x=6 durch Division umformen zu 2x=3 – und unsere Zahlbereichserweiterung ist nicht mehr eindeutig.
- Wir verlangen bei Bruchzahlen, dass diese gekürzt dargestellt werden. 4/6 ist also kein zulässiges Ergebnis. Wohl aber 2/3.

Die rationalen Zahlen lassen sich abzählen…..

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Die rationalen Zahlen lassen sich abzählen…..

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1}\ (1) & \rightarrow & \frac{1}{2}\ (2) & & \frac{1}{3}\ (5) & \rightarrow & \frac{1}{4}\ (6) & & \frac{1}{5}\ (11) & \rightarrow \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1}\ (3) & & \frac{2}{2}\ (\cdot) & & \frac{2}{3}\ (7) & & \frac{2}{4}\ (\cdot) & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{3}{1}\ (4) & & \frac{3}{2}\ (8) & & \frac{3}{3}\ (\cdot) & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{4}{1}\ (9) & & \frac{4}{2}\ (\cdot) & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1}\ (10) & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Die reellen Zahlen - Zahlbereichserweiterung

- Wir führen nun die nächste Zahlbereichserweiterung durch. Wir definieren die Lösung von x^2=2 als die Wurzel von 2.
- Es lässt sich zeigen dass die Wurzel von 2 keine rationale Zahl ist:
- Irrationalität der Wurzel von 2 (Wikipedia) oder auch auf Youtube…
- Die Wurzel aus 2 lässt sich als Dezimalzahl entwickeln

$1*1<2<2*2$
$1.4*1.4<2<1.5*1.5$

$1.41*1.41<2<1.42*1.42$

Diese Darstellung ist nicht periodisch.

Bei dieser Zahlbereichsdarstellung gehen wir nun «All in»

Die reellen Zahlen

- sind alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl.
- sind nicht abzählbar, so wie die rationalen Zahlen: Beweis auf Wikipedia
- eine präzise Definition findet sich hier: Wikipedia