Fachhochschule Nordwestschweiz
Pädagogische Hochschule

- PH
- FN Mathematik 1.1 Torsten Linnemann
- Zusammenhänge an der Hundertertafel $\boxed{A1}$

-

6 7	·	102	7 8	·	126
16 17	·	112	17 18	·	136
21 22	·	672	12 13	·	276
31 32	·	682	22 23	·	286

⇨ Feststellung: Die Produkte der Diagonale sind immer 10 weniger / mehr.

6 7	·	102	$\boxed{+10}$
16 17	·	112	

Gewinner bei der Umfrage, Bearbeitung 6

2b)

16	17
26	27

$16 \cdot 27 = 432$
$17 \cdot 26 = 442$
± 10

41	42
51	52

$41 \cdot 52 = 2132$
$42 \cdot 51 = 2142$
± 10

89	90
99	100

$89 \cdot 100 = 8900$
$90 \cdot 99 = 8910$
± 10

45	46
55	56

$45 \cdot 56 = 2520$
$46 \cdot 55 = 2530$
± 10

$\Rightarrow$

x	$x+1$
$x+10$	$x+11$

$x \cdot (x+11) = x^2 + 11x$
$(x+1) \cdot (x+10) = x^2 + 10x + x + 10 = x^2 + 11x + 10$
± 10

Studierendenlob:

- Am Beispiel der Begründung 6 ist klar ersichtlich, wie eine gute Begründung verständlich gemacht werden kann. Simpel dargestellt und auf einen Blick ersichtlich, dass die Begründung stimmt.
- wenig Worte, einfache Formeln, mehrere Beispiele zum Vergleich

Zweitplatziert bei der Umfrage, Bearbeitung 2

Aufgabe b Multiplikation

Nachdem ich von drei Viererquadraten jeweils die Diagonalen Multipliziert habe, konnte ich feststellen, dass die Diagonale von oben links nach unten rechts immer den Wert von 10 minus zur anderen aufweist. Begründung:

In der ersten Spalte des Quadrats mit vier Zahlen steht jeweils eine Zahl a und b. In der zweiten Spalte des Quadrats ist jeweils die Zahl aus der ersten Spalte plus den Wert 1. Multipliziert man die Diagonalen entsteht die folgenden Multiplikationen:

(a)* (b + 1) und (b) * (a + 1)

Werden diese beiden Multiplikationen ausgeklammert, erkennt man, dass diese folgenden Wert aufweisen:

ab + a ab + b

Stellt man diese beiden Terme in einer Gleichung zueinander:

ab + a = ab + b

Löst man die Gleichung nach 0 auf:

a – b = 0

Nun erkennt man, dass die Differenz der beiden Multiplikationen der Diagonalen den Wert von a – b aufweist. In einer Hundertertafel ist das selbstverständlich immer 10.

Studierendenlob:

- Eine gute Begründung macht in der Mathematik eine schöne und übersichtliche Darstellung aus. In einem Text verfasst ist eine bildliche Skizze/Hilfestellung hilfreich. Eine Kombination aus Text und Termen wie in Beispiel 2 finde ich die optimale Lösung für eine gute und einfach verständliche Erklärung in der Mathematik.

Klar ist: es gibt mehrere Kriterien, die nicht von allen gleich gewichtet werden.

Häufig genannte Kriterien (nicht wissenschaftlich ausgewertet…):

- Einfach und übersichtlich
- ..mit hervorgehobener Kernaussage (Was ist die wichtigste Erkenntnis, Aussage etc.)
- Die einzelnen Schritte der Darstellung beschreiben (Nachvollziehbarkeit)
- Begründung mit einer Darstellung (Skizze/Tabelle) visualisieren

Prototypische Antwort:

- -Auf das Wesentliche reduziert
- -Mit Beispielen untermauern
- -verständliche Sprache verwenden
- -Augenmerk auf knifflige Stellen richten

- Eine gute Begründung braucht für mich nicht nur einen natürlich geschriebenen Text sondern auch ein Beispiel. Dies hilft mir den Gedankenweg der Begründung zu verfolgen und ist so für mich verständlicher (vlt eine Geschmackssache).

- Eine Formel gehört für mich an den Schluss einer Begründung, da man erst auf sie schliessen muss…

Oder auch:

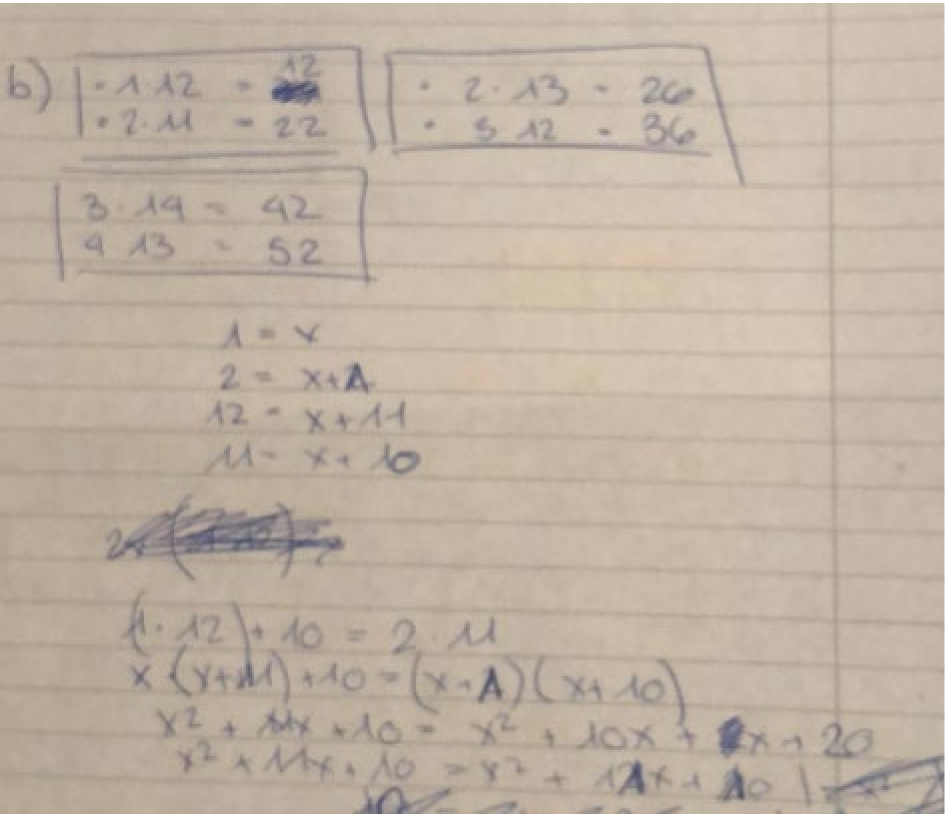
- Eine gute Begründung braucht einen verständlichen Text und einen Grund, wieso es so ist wie es ist. Wenn man nur Tatsachen aufschreibt(was man sieht) ist es ja nicht begründet. Beispiele dazu sind sehr hilfreich. Wenn man es kann ist auch eine Formel dazu sehr hilfreich und unterstreicht die Begründung!

Warum das Üben von Begründungen wichtig ist:

- Oftmals kann nicht in Worten gefasst werden, was gemeint ist und häufig wird der Gedanke zwar mathematisch dargestellt, aber nicht genügend ausformuliert. Das erschwert das Verständnis für die Begründungen.

- Eine gute Begründung muss erstmal eine Begründung als solches beinhalten. Bearbeitung 1 zum Beispiel erklärt zwar, was passiert bei der diagonalen Multiplikation in einem 4er Quadrat, weshalb das so ist wird jedoch nicht gezeigt. Gute Begründungen sind zudem einfach nachzuvollziehen. Für mich persönlich beinhaltet eine gute Begründung überdies einen verständlichen Fliesstext zu den Aussagen (das könnte daran liegen, dass ich selbst Mühe habe mit gewissen algebraischen Darstellungsformen), was ich auch im Hinblick auf eine Lehrtätigkeit in der Primarschule wichtig finde, da dort den Kindern sprachlich erklärt werden muss, warum Dinge sich so verhalten, wie sie das tun.

Zur Begründung 6 analoge Lösungen von Ihnen. Mal mit mehr Beispielen, mal mit mehr Fliesstext.



b.)

n	N+1
N+10	N+11

N *n+11= n^2 +11n

n+10 * n+1= n^2 +10n + n + 10

→ n^2 +11n + 10

Die zweite Rechnung hat 10 mehr.

Diese Rechnung zeigt, dass die Differenz immer 10 beträgt, wenn man diese Aufgabe innerhalb eines Hunderterfeldes löst und die Zahlen diagonal multipliziert.

Feststellung: Egal welche vier Zahlen wir nehmen, die Produkte der Zahlen liegen genau 10 nebeneinander. Wenn wir nun eine beliebige Zahl nehmen und diese x nennen, dann ist die Zahl rechts daneben x+1. Die Zahl unter x ist demnach x+10 und zuletzt die Zahl nebendran ist x+11. Somit können wir die beiden Rechnungen wie folgt verallgemeinert aufschreiben.

x · (x+11) = x^2 + 11x

(x+1) · (x+10) = x^2 + 11x + 10

Qed.

Zur Begründung 2 analoge Begründung. Mit Beispielen und Fliesstext. So soll es sein?

b) Beispiele:

blaues Quadrat: $12 \cdot 23 = 276$ und $13 \cdot 22 = 286$

grünes Quadrat: $44 \cdot 55 = 2'420$ und $45 \cdot 54 = 2'430$

rotes Quadrat: $37 \cdot 48 = 1'776$ und $38 \cdot 47 = 1'786$

pinkes Quadrat: $77 \cdot 88 = 6'776$ und $78 \cdot 87 = 6'786$

Feststellung:

Das Produkt der beiden Diagonalen unterscheidet sich jeweils um den Wert 10. Das Produkt der zweiten Diagonale (von rechts oben nach links unten) ist immer um 10 grösser.

Begründung:

In der ersten Spalte des Quadrats steht jeweils eine Zahl x und y. In der zweiten Spalte des Quadrats sind die Zahlen x und y jeweils um den Wert 1 grösser. Nun werden die Zahlen der beiden Diagonalen multipliziert:

$x \cdot (y + 1) = y \cdot (x + 1)$

Klammern auflösen:

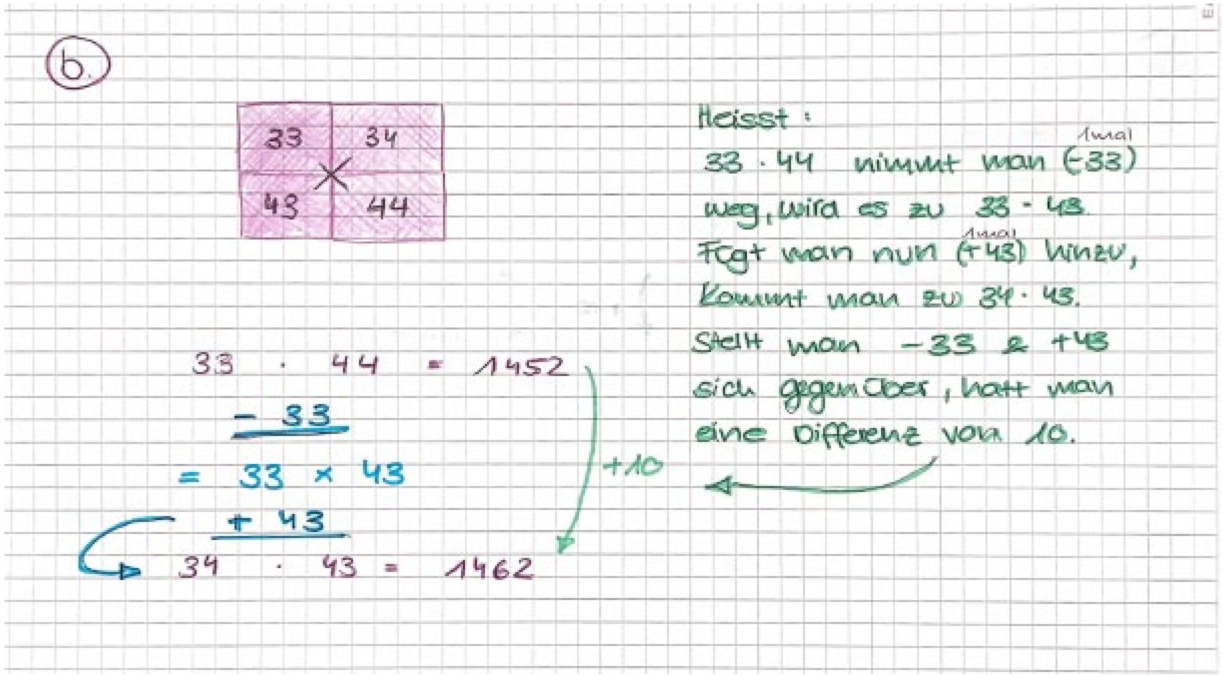
$xy + x = xy + y$

Gleichung auflösen:

$x - y = 0$

Die Differenz der beiden Multiplikationen der Diagonalen weist also den Wert x - y auf, was in einer Hundertertafel immer dem Wert -10 entspricht. Daher ist das Produkt der einen Diagonale jeweils um 10 grösser bzw. kleiner.

**Peter Gallin: Algebra als befreiende Abstraktion.
Geht es auch ohne?**



Schöne Idee. Mehr Beispiele?

Wie komme ich auf eine Idee?

- Ausnutzen der Struktur. Zehnersystem. Anordnung im Hunderterfeld.
- Auseinandernehmen 42+53=40+2+50+3 und sehen, was sich erkennen lässt (gleiche Summanden bei 43+52.) Davon ausgehend weiter machen.
- Das geht auch bei b, ist nicht ganz so einfach:

Begründung:

Anders als bei der Addition ist es bei der Multiplikation. Werden hier die Ziffern «beliebig» vertauscht, hat das Konsequenzen für das Produktwert. Dieses ist dann aufgrund der Rechnungsweise (Einer und Zehner des Faktors werden mit dem Multiplikanden multipliziert. Hier wird deutlich, weshalb wir ein anderes Ergebnis erhalten) bei den zwei Rechnungen unterschiedlich gross.

Wenn die Faktoren übers Kreuz auf der Hundertertafel multipliziert werden, fällt auf, dass das Produkt der beiden Multiplikationsrechnung sich um 10 voneinander unterscheidet.

Mögliche Begründung:

Je höher der Multiplikator (1. Faktor) wird, desto höher ist das Produkt. Selbst wenn der Multiplikand (2. Faktor) kleiner geworden ist, ist der Multiplikator entscheidender. Dies ist an einem einfachen Beispiel zu verdeutlichen.

1 x 12 = 12

2 x 11 = 22

Wenn die Rechnung auseinandergenommen wird, sieht sie wie folgt aus:

(10 x 20) + (**10** x **4**) + (**3** x **20**) + (3 x 4) = 312

(10 x 20) + (**10** x **3**) + (**4** x **20**) + (4 x 3) = 322

Wenn beim Multiplikator der Einer kleiner ist als der Einer beim Multiplikanden, ist das Produkt grösser. Wenn der Einer beim Multiplikator grösser ist als der Einer beim Multiplikanden, ist das Produkt kleiner.

- Ja genau. Und jetzt mehr Beispiele.

Problem mit Fliesstext: Versteht das jemand, der die Lösung noch nicht kennt? Ist das Problem wirklich verstanden?

Begründung: Durch das diagonal Rechnen wird jeweils eine grössere mit einer kleineren Zahl aus den jeweiligen 10ner-reihen multipliziert. Das Resultat der Rechnung, welche die grössere Zahl an erster Stelle hat, wird um 10 grösser, da die 10ner-Stelle ja einmal mehr dazu gerechnet wird als bei der Rechnung, die die kleinere Zahl an erster Stelle hat(z.B. bei 1,2,11,12 → 1x12, 2x11→ die 10ner-Stelle wird einmal mehr dazu gerechnet(die Differenz zwischen den Zahlen in der jeweiligen 10ner-Reihe beträgt nur ja 1 → deswegen wird die 10ner-Stelle einmal mehr dazu gerechnet)). Dies ist auch der Grund dafür, dass sich die 1ner-Stelle im Resultat ausgleicht (→ 1x2=2 und 2x1=2 → auch hier wird die 1ner-Stelle bei der Rechnung mit der grösseren Zahl an erster Stelle einmal mehr dazu gerechnet und durch die diagonale Berechnung gleicht es sich aus).

Und dieser Fliesstext?

- b)

$7 \cdot 18 = 126$	$42 \cdot 53 = 2'226$	$1 \cdot 12 = 12$
$8 \cdot 17 = 136$	$43 \cdot 52 = 2'236$	$2 \cdot 11 = 22$

Die 2. Diagonale Rechnung gibt immer 10 mehr.

Da die Multiplikation jeweils zwischen den 1ern bzw. den 10ern immer die gleiche ist, muss es etwas mit der Multiplikation zwischen den 1ern und den 10ern zu tun haben. Bei der 2. Rechnung wird der grössere 10er einmal mehr multipliziert und der kleinere einmal weniger. Und da der grössere 10er höchstens ein 10er höher ist, beträgt der Unterschied danach auch immer 10.

Das gleiche arithmetische Argument. Mit graphischer Hervorhebung statt Fliesstext. Auch nur ein Beispiel.

$$
\begin{aligned}
(10+3)\cdot(20+2) &= (10\cdot(20+2) + 3\cdot(20+2)) \\
&= (10\cdot 20) + \boxed{(10\cdot 2) + (3\cdot 20)} + (3\cdot 2) \\
&= 200 + \boxed{20 + 60} + 6 \\
&= 286
\end{aligned}
$$

$12 \cdot 23$

$$
\begin{aligned}
(10+2)\cdot(20+3) &= (10\cdot(20+3) + 2\,(20+3)) \\
&= (10\cdot 20) + \boxed{(10\cdot 3) + (2\cdot 20)} + (2\cdot 3) \\
&= 200 + \boxed{30 + 40} + 6 \\
&= 276
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ ■ $\neq$ ■ $\rightarrow$ weil $(10\cdot 3) + (2\cdot 20) \neq (10\cdot 2) + (3\cdot 20)$

Das bedeutet das Kreuzprodukt enthält zwar die gleichen Zahlen, jedoch nicht die selben Summanden!

!

- Fliesstext mit guter Graphik kombinieren! Mehr Beispiele. Dabei klar machen, warum es bei jedem Beispiel funktioniert.

Hier erkenne ich den Kernpunkt nicht

- **Begründung:**
  Der Einer der ersten Zahl der Rechnung, ist von Bedeutung, denn der Einer der ersten Zahl wird auch mit dem Zehner der zweiten Zahl multipliziert, dies erklärt wieso das Produkt mit dem grösseren Einer, jedoch gleichen Zehner, grösser ist, wie das Produkt mit dem kleineren Einer und gleichen Zehner. Die Produkte der Diagonalen haben 10 unterschied, da es zwischen den zwei Rechnungen der Diagonale immer einen Zehner Unterschied gibt.

  Bsp.: 49 x 60
  50 x 5

Begründung:

Der Unterschied ist 10, weil jede Zeile der Tabelle in 10er-Schritten eingeteilt ist.

Die Ergebnisse sind jeweils um einen Zehner grösser. Meine Vermutung ist, dass dies zusammenhängt, da alle Ziffern jeweils miteinander multipliziert werden. Bei der Addition werden jeweils lediglich die Einer mit den Einer zusammengerechnet, die Zehner mit den Zehner usw.

Interessante Idee:
Produkt a*b ist dann am grössten, wenn a=b. Die Diagonale gewinnt, bei der a und b näher beisammen liegen.

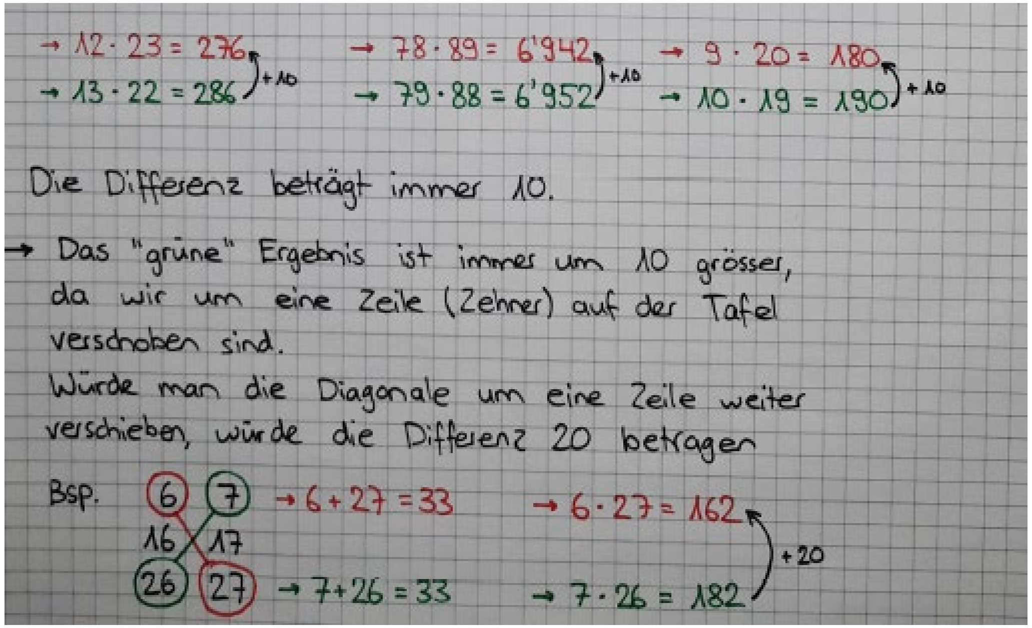
-

↳ Die Resultate sind stets um 10 verschoben.
Begründung:
Die Differenz zwischen den Zahlen ist bei den zweiten Rechnungen (28 29 · 38) ~~[illegible]~~ kleiner.

Es gibt bei der 2. Rechnung immer 10 mehr.
Dies weil die Zahlen bei der 1. Rechnung 11 auseinander sind und bei der zweiten nur 9.
Der Mittelwert dieser beiden Zahlen ist 10. Deshalb ist die 2. Rechnung 10 grösser.

Verallgemeinern ist auch immer schön:

•



→ 12 · 23 = 276
→ 13 · 22 = 286
+10

→ 78 · 89 = 6'942
→ 79 · 88 = 6'952
+10

→ 9 · 20 = 180
→ 10 · 19 = 190
+10

Die Differenz beträgt immer 10.

→ Das "grüne" Ergebnis ist immer um 10 grösser, da wir um eine Zeile (Zehner) auf der Tafel verschoben sind.
Würde man die Diagonale um eine Zeile weiter verschieben, würde die Differenz 20 betragen

Bsp.
6 7
16 17
26 27

→ 6 + 27 = 33
→ 7 + 26 = 33

→ 6 · 27 = 162
→ 7 · 26 = 182
+20

- Analogie mit anderem Problem: gut

Begründung:

Auch hier hat das Resultat wieder einen Zusammenhang mit der Anordnung der Zahlen in der Hundertertafel. Nur ist hier das Resultat nicht gleich, sondern um zehn verschieden. Dies liegt daran, dass hier multipliziert und nicht addiert wird. Bei einer Multiplikation geht das Vertauschen der Einer und der Zehner dementsprechend nicht wie bei der Addition. Denn multipliziert man 3x4=12 und 2x5=10 erhält man auch andere Resultate obschon bei der Addition 3+4=7 und 2+5=7 die gleiche Summe entsteht.

- (danach noch mit Algebra gelöst.)

Wichtig wäre für das Diagonalenproblem eine graphische Darstellung. Das geht mit dieser Idee, und den folgenden Inhalten:
Heute, 10.3.: Operative Beweise
Nächste Veranstaltung, 17.3.: graphische Begründung der Rechengesetze.
Schaffen Sie damit eine graphische Begründung?

$$1 \cdot 12 = 12 \qquad (1\cdot 11)+(1\cdot 1) = 12$$
$$+1 \downarrow \quad -1 \downarrow \quad +10 \downarrow \qquad\qquad \downarrow +10$$
$$2 \cdot 11 = 22 \qquad (1\cdot 11)+(1\cdot 11) = 22$$

$$54 \cdot 65 = (54 \cdot 64) + (54 \cdot 1) = 3'510$$
$$\downarrow +10$$
$$55 \cdot 64 = (54 \cdot 64) + (1 \cdot 64) = 3'520$$

$$59 \cdot 70 = (59 \cdot 69) + (59 \cdot 1) = 4'130$$
$$\downarrow +10$$
$$60 \cdot 69 = (59 \cdot 69) + (1 \cdot 69) = 4'140$$