Fachhochschule Nordwestschweiz
Pädagogische Hochschule

Operative Beweise

Torsten Linnemann

Erforschen und Argumentieren gemäss Lehrplan 21

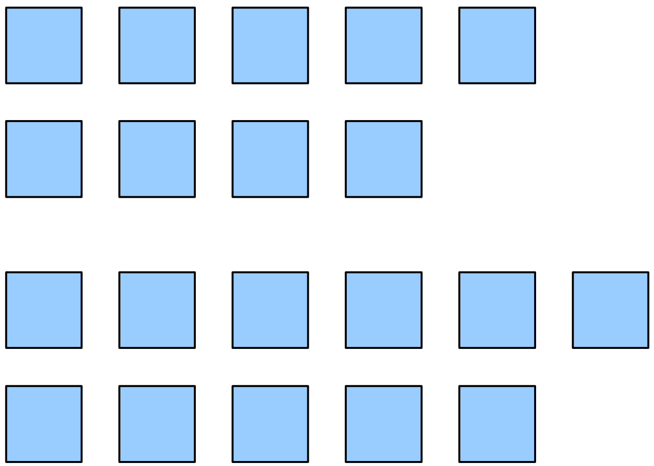
Beim Erforschen und Argumentieren erkunden und begründen die Lernenden mathematische Strukturen. Dabei können beispielhafte oder allgemeine Einsichten, Zusammenhänge oder Beziehungen entdeckt, beschrieben, bewiesen, erklärt oder beurteilt werden.

Begründen Sie

Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets gerade.

Operative Beweise

Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets gerade:

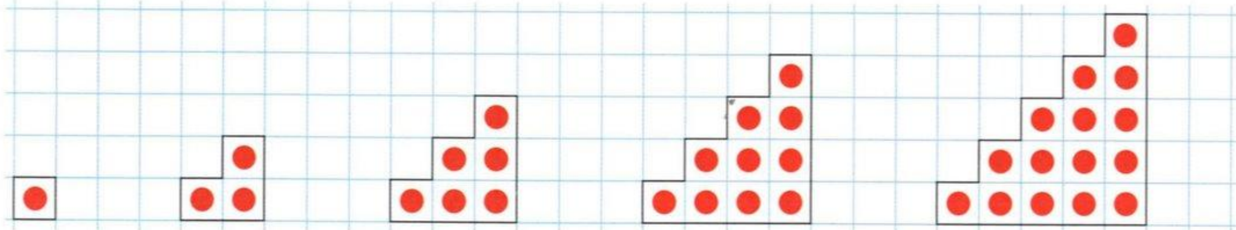


Satz: (Die Summe der ersten n Zahlen) + (Summe der ersten n+1 Zahlen) gibt eine Quadratzahl, Beispiel (1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)=25.

(Tipp: Versuchen Sie eine graphische Darstellung)

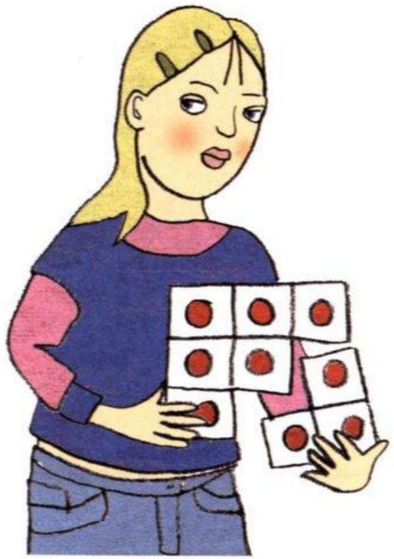
Dreieckszahlen
Zahlenbuch 2:

2 Dreieckszahlen

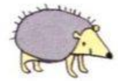


1	1 + 2	1 + 2 + 3	Wie geht es weiter?
1	**3**	**6**	

3



	A		B
	1 + 3		21 + 28
	3 + 6		28 + 36
	6 + 10		36 + 45
	10 + 15		45 + 55
	15 + 21		55 + 66



Was fällt dir auf?

Definition operativer Beweis

Inhaltlich-anschauliche, operative Beweise stützen sich […] auf Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, daß sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen.“

(Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.),Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis (S. 237-257). Berlin: Cornelsen. , S. 249)

Dadurch, dass aber nicht auf einzelne Beispiele, sondern auf allgemein ausführbare Operationen und deren „Wirkungen“ zurückgegriffen wird, ist die Allgemeingültigkeit gesichert. Man nennt Beweise dieser Art deshalb operative Beweise.

(Wittmann, E. C., & Ziegenbalg, J. (2007). Sich Zahl um Zahl hochangeln. In G. Müller, H. Steinbring, & E. C. Wittmann (Hrsg.), Arithmetik als Prozess (S. 35-53). Seelze: Kallmeyer, S. 38)

Stichworte operativer Beweis

Nicht unbedingt enaktiv, nicht unbedingt ikonisch, sondern

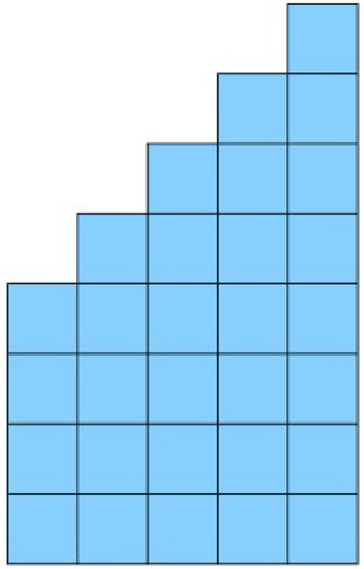
mit generischen Beispielen operieren, klar machen, dass der Zusammenhang allgemein gültig ist.

Zusammenspiel von arithmetischen, graphischen und sprachlichen Elementen.

Klassisches graphisches Element: Pfeile

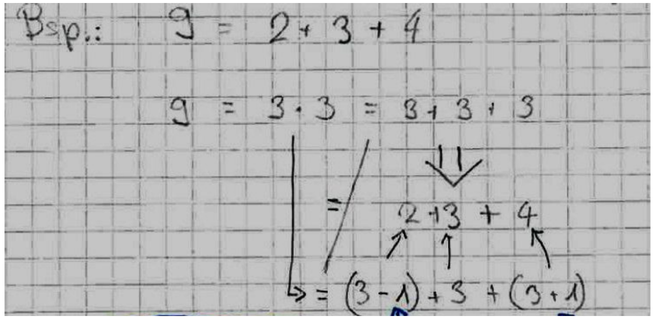
Auftrag für Schülerinnen und Schüler

Auftrag 1.17 Es geht um die folgende Behauptung:
«Für jeder ungerade Zahl u ist die Summe von u aufeinander folgenden Zahlen durch u teilbar.»
Dargestellt ist für $u = 5$ die Summe der Zahlen 4 bis 8. Das Ergebnis ist 30 – und also durch 5 teilbar, die Aussage stimmt für dieses Beispiel.
Prüfen Sie mit einigen weiteren Beispielen nach, ob die Aussage stimmt und überlegen Sie, warum es so sein könnte.
Die Darstellung mit Kästchen wie im Beispiel rechts kann helfen.

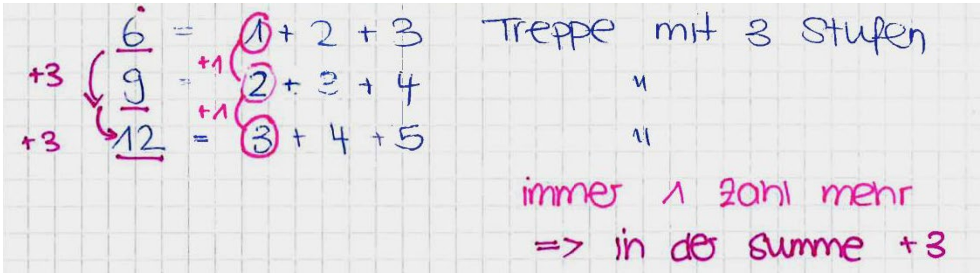


Summe von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen, Lösungen SuS

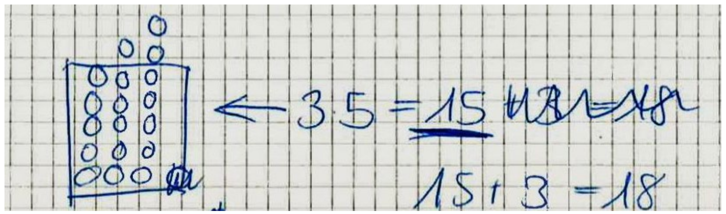
arithmetisch, direkt



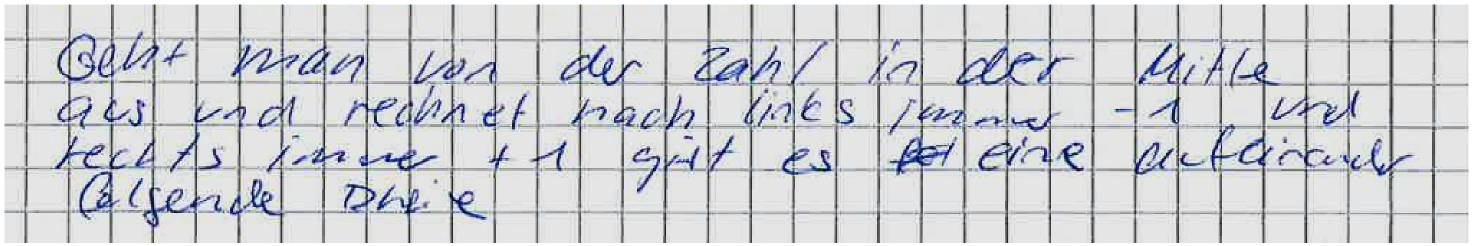
arithmetisch, induktiv



ikonisch



sprachlich



Begründen Sie, nach Möglichkeit auf verschiedenen Wegen (ganz ohne Worte geht es nie)

a) Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade

b) Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen ungeraden Zahl ist eine Quadratzahl. Beispiel 1+3+5+7=16

c) Die Summe der ersten n Zahlen ergibt n*(n+1)/2. Beispiel 1+2+3+4+5=10=4*5/2

d) Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade.