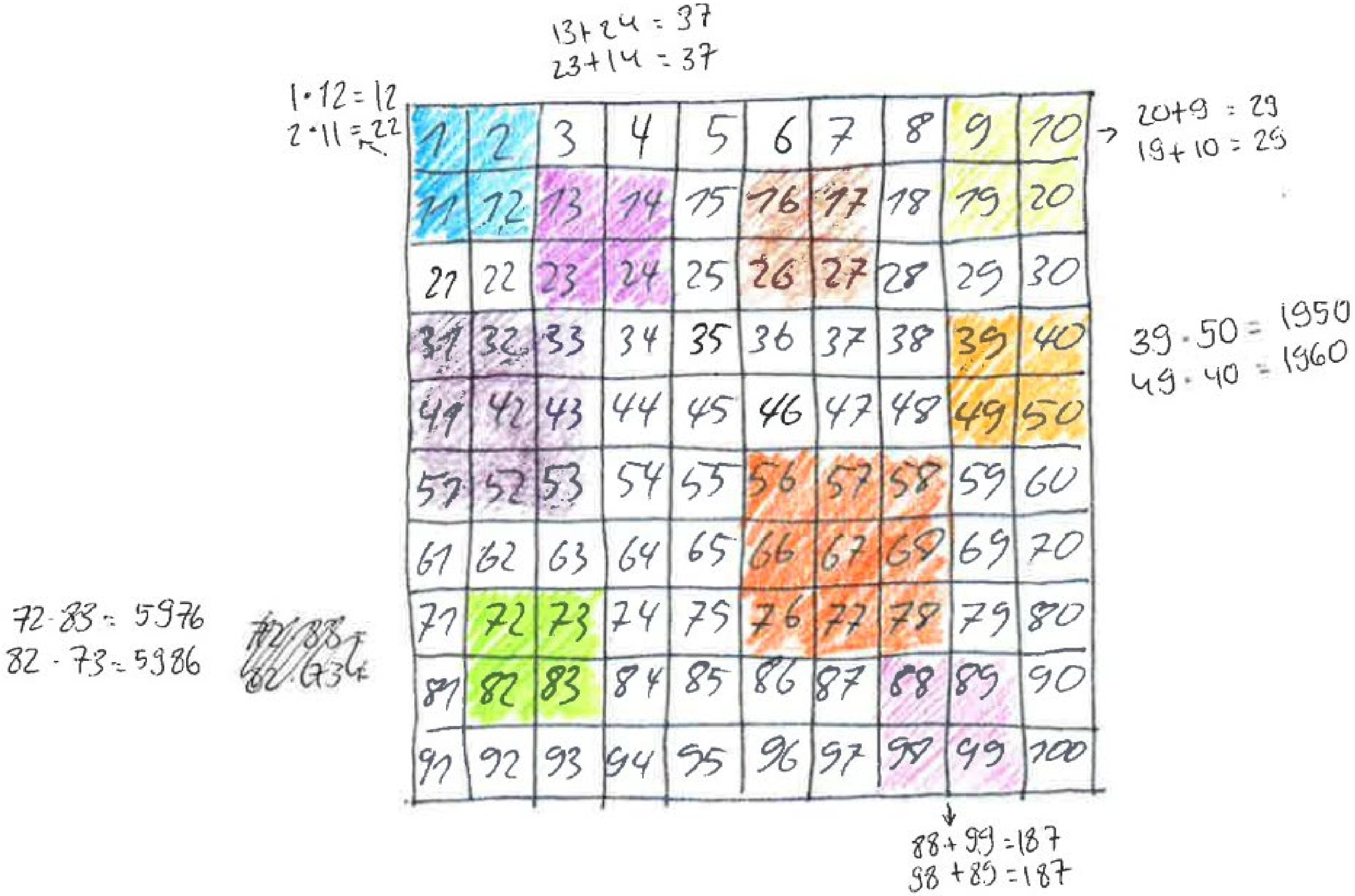
n|w Fachhochschule Nordwestschweiz
Pädagogische Hochschule
Dr. Torsten Linnemann

Universität Koblenz · Landau
Dr. Christian Fahse



wie begründet man es gut?

Bearbeitung einer Gymnasiastin (10. Klasse)

$16 \cdot 27 = 432$

$17 \cdot 26 = 442$

$x(x+11) = x^2 + 11x$

$(x+1)(x+10) = x^2 + x + 10x + 10 = x^2 + 11x + 10$

Frage der Schülerin: «Reicht ein Beweis, oder muss ich es auch begründen?»

Begründen

«Insgesamt halten wir fest: Ohne die Frage nach dem WARUM kann ein Unterricht kein authentischer Mathematikunterricht sein, denn diese Frage ist für das „Mathematik treiben an sich" zentral. Das Umgehen mit dem WARUM gilt bei vielen Lernenden und Lehrkräften als schwierig, doch ist es lernbar, wenn eine Unterrichtskultur entwickelt wird, in der die Frage nach dem WARUM zur Selbstverständlichkeit wird.» (Meyer und Prediger, 2009)

Lehrplan 21 – Erforschen und Argumentieren

http://konsultation.lehrplan.ch/index.php?nav=150|30&code=e|5|3

Beim Erforschen und Argumentieren erkunden und begründen die Lernenden mathematische Strukturen. Dabei können beispielhafte oder allgemeine Einsichten, Zusammenhänge oder Beziehungen entdeckt, beschrieben, bewiesen, erklärt oder beurteilt werden.

Grundtypen von Begründungen im MU (Bruder 2012)

1. Begründen durch Identifizieren oder Realisieren eines Begriffes

2. Begründen durch Identifizieren oder Realisieren eines Verfahrens

3. Begründen durch Identifizieren oder Realisieren eines Satzes

(verwenden i.d.R. Schluss aus Universalaussage oder ggf. auch Drittengleichheit)

4. Begründen über den Schluss der Kontraposition

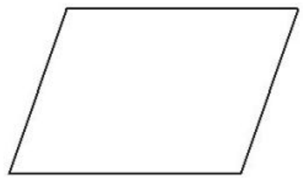
5. Widerlegen einer Aussage durch Angabe eines Gegenbeispiels

1. Begründung durch Identifizieren eines Objektes oder einer Relation

Aussage: Der Zug ist eine Regionalbahn!

Begründung: Er hält an jedem Bahnhof, den er passiert.

Objekt:



Begründung: Das ist ein Parallelogramm, weil jeweils

zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

2. Begründung durch Realisieren eines Verfahrens

Aussage: Der Sportler ist gedopt.

Begründung: Die korrekte Anwendung eines geprüften Nachweisverfahrens für Doping hatte ein pos. Ergebnis.

Aussage: Das lineare Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung:

$5x+3y = 22$ $8x-4y = 0$

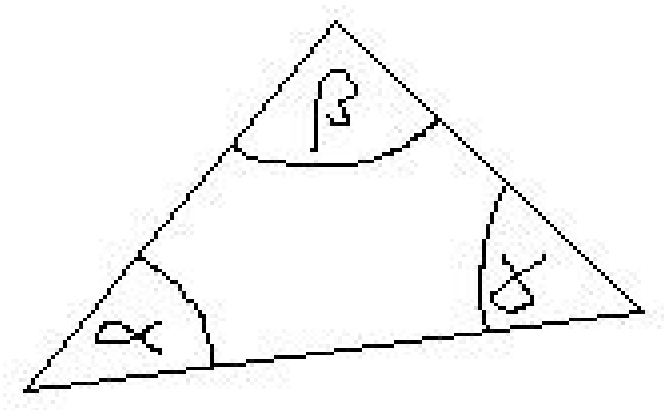
Begründung: Die Anwendung des Additionsverfahrens ist gerechtfertigt und führt zur Lösung $x= 2$ und $y= 4$.

Alternative: Die Interpretation der beiden Gleichungen als lineare Funktionen zeigt, dass die beiden Geraden weder identisch noch parallel sind.

3. Begründung durch Identifizieren oder Realisieren eines Zusammenhangs

Bekannt: $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$

Aussage: $\gamma = 80°$



Begründung:

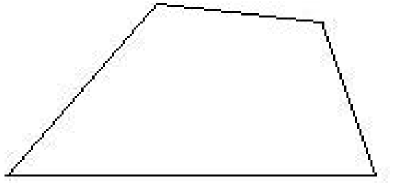
Innenwinkelsummensatz für (ebene) Dreiecke

4. Anwenden der Kontraposition eines Satzes

Trifft A ein, folgt B wahr.   A => B
Ist B nicht eingetroffen, so ist folglich auch A nicht eingetroffen.
kein B => kein A

Voraussetzung:	Wenn es regnet (A), ist der Boden nass (B).
Aussage:	Es hat nicht geregnet.
Begründung:	Der Boden ist nicht nass, deshalb kann es nicht geregnet haben.

Begriff:	Ein Trapez ist ein Viereck, bei dem mindestens zwei Seiten parallel verlaufen.
Satz:	*Wenn ein Viereck ein Trapez ist, dann gilt...*



Aussage:	Das ist kein Trapez.
Begründung:	Es sind nicht mindestens zwei Seiten parallel.

5. Widerlegung einer Universalaussage durch ein Gegenbeispiel

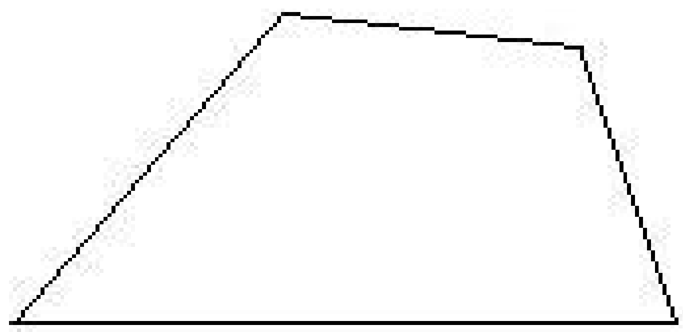
Aussage: Alle Rosen sind rot.

Widerlegung: Zeigen einer andersfarbigen Rose.

Aussage: Alle Vierecke sind Quadrate.

Widerlegung: Das ist ein

Viereck, aber kein Quadrat.



Was ist ein Beweis? (Nach Ufer et al, 2009)

«…Verknüpfung deduktiver Schlüsse[…]basierend auf[…]gemeinsamer Wissensbasis…»

«Wie Mac Laine (1981) darstellt, werden in der wissenschaftlichen Mathematik meist Beweise kommuniziert, die eben nicht im eigentlichen Sinn formal abgefasst sind, sich aber prinzipiell zu formalen Beweisen ergänzen lassen, indem fehlende Stücke eingefügt werden.»

Kriterien aus Sicht von Schüler*innen (Fahse, Linnemann, 2015, 2016)

- eine Begründung muss auf den Punkt sein und nicht langes „Herumgefasel“.
- kurz und bündig
- verständliches und gutes Deutsch (einfach)
- Verständliche, richtige Fachsprache
- klar und übersichtlich
- jeder Schritt wurde erklärt.
- gute Einbindung von Text, Formeln, Skizzen, Beispielen
- Beispiele und Gegenbeispiele verwenden

Kriterien aus Sicht von Schüler*innen (Fahse, Linnemann, 2015, 2016)

Zahlenbeispiele oder nicht?

- viele Beispiele und dann in eigenen Worten erklären

Aber auch:

- Lieber ein allgemeines Beispiel als irgendwelche Zahlen.
- Eine gute Erklärung kann ohne Zahlen auskommen, diese jedoch als Hilfestellung verwenden.
- Beispiele dienen zur Veranschaulichung – stellen aber keine eigenständige Begründung dar.

Beispiel aus der Zahlentheorie

Satz: Werden drei aufeinanderfolgende Zahlen addiert, so ist die Summe durch drei teilbar.

1	+	2	+	3	=	6
2	+	3	+	4	=	9
3	+	4	+	5	=	12
4	+	5	+	6	=	15

Kein Beweis

Beispiel II aus der Zahlentheorie

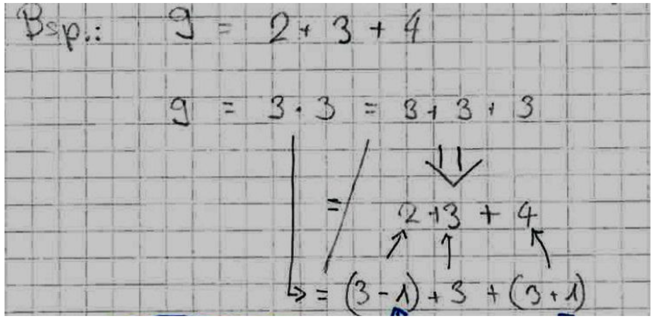
Satz: Werden drei aufeinanderfolgende Zahlen addiert, so ist die Summe durch drei teilbar.

1	+	2	+	3	=	6
↓+1		↓+1		↓+1		↓+3
2	+	3	+	4	=	9
↓+1		↓+1		↓+1		↓+3
3	+	4	+	5	=	12
↓+1		↓+1		↓+1		↓+3
4	+	5	+	6	=	15

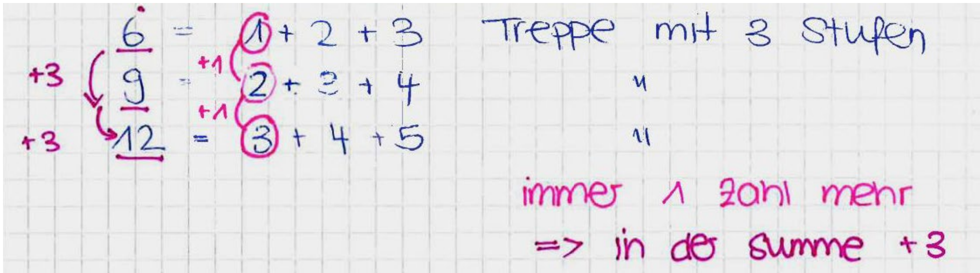
- Es wird klar, dass das immer so weitergeht – schliesslich werden alle Summen aus drei aufeinanderfolgenden Zahlen getroffen. -> plausible Argumentation

Summe 3 aufeinanderfolgende Zahlen, Bearbeitungen von Schüler*innen

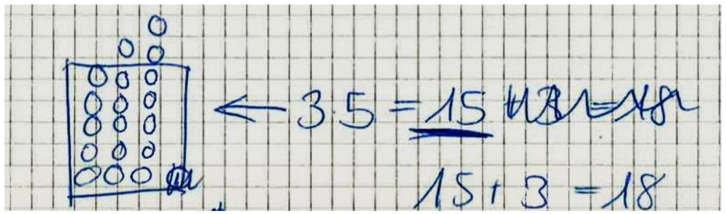
arithmetisch, direkt



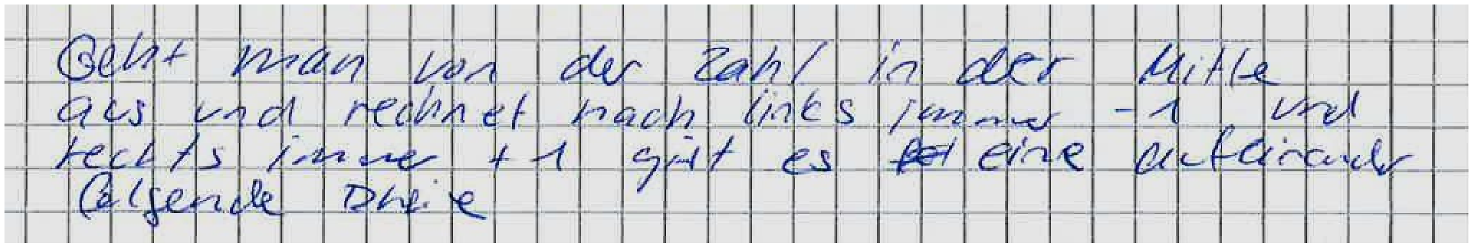
arithmetisch, induktiv



ikonisch



sprachlich



Argumentieren: Was sollten Sie können, spätestens am Ende des Studiengangs?

- An das Niveau von Schüler*innen angepasst argumentieren (ikonisch, beispielgebunden, arithmetisch)
- Bearbeitungen von Schüler*innen diagnostizieren
- Formale mathematische Argumentationen formulieren und verstehen (algebraisch, Funktionen)

Literatur

- Bruder, R. (2012). Konsequenzen aus den Kompetenzen? Vortrag auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik am 06.03.2012 in Weingarten. http://www.math-learning.com/files/120306wg.pdf, 1.10.2012
- Deutschschweizer Erziehungsdirektorenkonferenz D-EDK (2014): Lehrplan 21. Mathematik. http://vorlage.lehrplan.ch/downloads/check_pdf.php?b2=1&b3=1&code=5|0&druckzyklus=0
- Fahse, C., Linnemann, T. (2015): Genügt der Beweis, oder soll ich das auch erklären? Praxis der Mathematik 64. S. 19-23
- Linnemann, T., Fahse, C. (2016): Argumentationskultur ausbilden. Mathematik Lehren 198 - Langfristiger Kompetenzaufbau. S. 30-36
- MacLane, S. (1981): Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics. The American Mathematical Monthly, 88, 462-472.
- Meyer, M. und Prediger, S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. Praxis der Mathematik 30, S. 1-7. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/09-Meyer_Prediger_PM-H30-Argumentieren-Webversion.pdf
- Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. und Rudolph-Albert, F. (2009): Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Journal für Mathematik-Didaktik, 30, 30-54.