

1 Begründen

1.1 Hundertertafel – Pflichtaufgabe

- a) Wählen Sie ein Quadrat mit vier Zahlen in der Hundertertafel. Bilden Sie die Summe der Diagonalen (im Beispiel im Bild wäre das $16+27$ und $17+26$).
Führen Sie das für mehrere Beispiele durch.
Was stellen Sie fest?
Begründen Sie Ihre Vermutung so, dass jemand aus dem Kurs ihre Begründung gutverstehen kann.
- b) Bilden Sie nun die Produkte der Diagonalen (im Beispiel also $16 \cdot 27$ und $17 \cdot 26$).
Führen Sie auch hier mehrere Beispiele aus.
Was stellen Sie fest?
Begründen Sie Ihre Vermutung wiederum so, dass jemand aus dem Kurs ihre Begründung gut verstehen kann.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.2 Operative Beweise – Pflichtaufgabe

Begründen Sie, nach Möglichkeit auf verschiedenen Wegen (ganz ohne Worte geht es nie)

- Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade
- Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen ungeraden Zahl ist eine Quadratzahl. Beispiel $1+3+5+7=16$
- Die Summe der ersten n Zahlen ergibt $n \cdot (n+1)/2$. Beispiel $1+2+3+4+5=10=4 \cdot 5/2$
- Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade.

2 Natürliche Zahlen

2.1 Multiplikationen auf Kernaufgaben zurückführen Pflichtaufgabe

Im Kontext des Multiplizierens lernen Kinder so genannte *Kernaufgaben* kennen. Damit sind die unter anderem die folgenden Multiplikationen gemeint (in der Einmaleins-Tafel farblich gekennzeichnet, vgl. Anhang 1):

- Aufgaben der Einerfolge: $n \cdot 1$ und $1 \cdot n$ (Randaufgaben, grün eingefärbt)
- Aufgaben der Zweierfolge: $n \cdot 2$ und $2 \cdot n$ (Verdopplungsaufgaben, blau)
- Aufgaben der Fünferfolge: $n \cdot 5$ und $5 \cdot n$ (Kraft der Fünf, gelb eingefärbt)
- Aufgaben der Zehnerfolge: $n \cdot 10$ und $10 \cdot n$ (Randaufgaben, grün)

Die Bedeutung solcher Kernaufgaben ist eine zweifache:

- Diese Aufgaben sind leicht auswendig zu lernen, denn sie bestehen entweder aus einfachsten Multiplikationen (Einer- und Zehnerfolge) oder aus der Verdopplung der Einerfolge (Zweierfolge) bzw. Halbierung der Zehnerfolge (Fünferfolge).

- Alle anderen Multiplikationsaufgaben lassen sich auf Kernaufgaben zurückführen. So kann etwa $3 \cdot 4$ als $2 \cdot 4 + 1 \cdot 4$ berechnet werden, oder als $4 \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3$, usw. usf.

Man erhält so für die Aufgabe $3 \cdot 4$ mehrere Gleichungen:

$$3 \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \quad \text{bzw.} \quad 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \quad \text{bzw.}$$

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot (2 \cdot 3) \quad \text{bzw.} \quad 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \quad \text{usw.}$$

- a) Führen Sie folgende Multiplikationsaufgaben auf je zwei bis drei Kombinationen von Kernaufgaben zurück und notieren Sie den Weg:

a₁) $4 \cdot 4$

a₅) $8 \cdot 9$

a₂) $6 \cdot 8$

a₆) $13 \cdot 12$

a₃) $9 \cdot 4$

a₇) $17 \cdot 18$

- b) Empirische Studien zeigen, dass die Aufgabe $7 \cdot 8$ besonders vielen Kindern schwer fällt. Argumentieren Sie vor dem Hintergrund von Kernaufgaben, weshalb dies zu erwarten ist.

Für das Rechnen mit (reellen) Zahlen gelten folgende *Umformungsgesetze*:

- Kommutativgesetz: (K_{plus}) $a + b = b + a$ bzw. (K_{mal}) $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz: (A_{plus}) $a + (b + c) = (a + b) + c$ bzw. (A_{mal}) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Distributivgesetz: (D) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

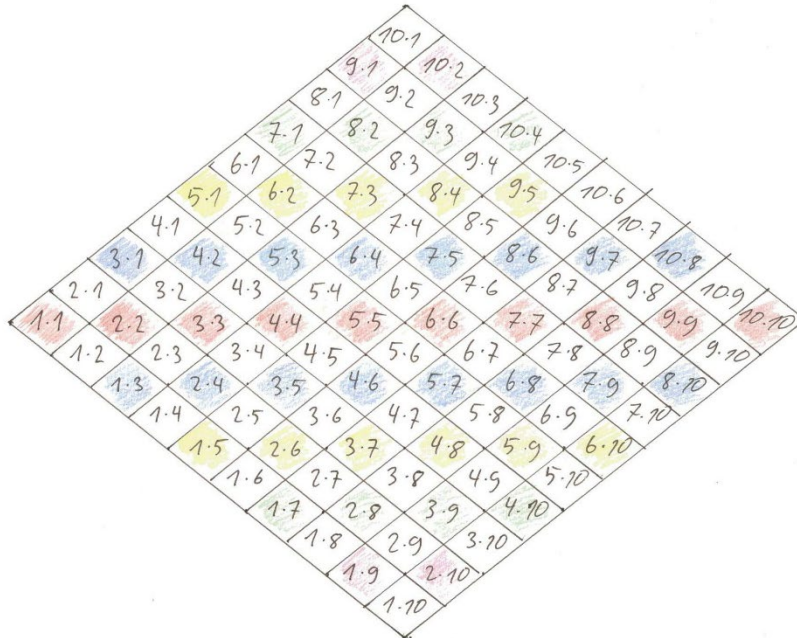
- c) Was besagt das Assoziativgesetz der Addition in Umgangssprache (Worten)?

- d) Bestimmen Sie in Ihren Umformungen (... = ...) für a₁) bis a₇), bei welchen Gleichheiten „=" jeweils welche(s) Gesetz(e) zum Einsatz kommt.

- e) Wie würde das Kommutativgesetz der Division lauten? Ist es korrekt? Und gilt das Assoziativgesetz auch für die Division?

2.2 Muster an der 1x1 Tafel – Pflichtaufgabe

In der Graphik sind alle Aufgaben des 1 Mal 1 dargestellt. Es sollen einige Muster, die auftreten, näher betrachtet werden.



- Auf der mittleren horizontalen Linie stehen die Quadratzahlen (rot). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den genau darüber/darunter befindlichen Aufgaben (zum Beispiel $6 \cdot 6$ und $7 \cdot 5$, blau). Was fällt auf? Formulieren Sie den Zusammenhang und begründen Sie ihn (ikonisch (operativer Beweis), allgemein arithmetisch oder algebraisch). Versuchen Sie, mehrere Begründungen zu finden.
- Im ersten Auftrag haben Sie sich von den Quadraten um eine Raute nach oben/unten bewegt. Was ergibt sich, wenn Sie um zwei Rauten nach oben/unten gehen? Oder um 3, oder um noch mehr? Probieren Sie einige Rechnungen durch. Versuchen Sie, Regelmässigkeiten zu erkennen. Formulieren Sie Ihre Feststellungen. Begründen Sie auch hier.
- Versuchen Sie Gründe für die Regelmässigkeiten zu finden.

2.3 Aufgabe 1: Grundvorstellungen zur Multiplikation und zur Division

- Formulieren Sie zwei Sachaufgaben, die beide auf die Multiplikation $12 \cdot 3 \cdot 7$ führen, jedoch auf verschiedene Grundvorstellungen der Multiplikation zielen.
- Welche Vorteile hat die Vervielfachungsvorstellung der Multiplikation gegenüber der Kombinationsvorstellung der Multiplikation? Welche Nachteile hat sie?
- Auf welche Grundvorstellung der Division zielt die nachstehende Sachaufgabe zur Rechnung $98 : 14$? Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz:
Ein Kind erhält zu Weihnachten 98 Franken und möchte damit Bücher kaufen, die je 14 Franken kosten. Wie viele dieser Bücher kann es sich kaufen?
- Formulieren Sie die Sachaufgabe in c) so um, dass sie auf eine andere Grundvorstellung zur Division zielt (in demselben Sachkontext wie in c).
- Nachstehen sind sechs verschiedene Antworten auf die Frage in d) abgebildet:

S1: "Ein Kind hat sich 7 Bücher gekauft. Jedes Buch ~~wes~~ kostete 14 Franken. Wie viel Geld hat das Kind für alle Bücher bezahlt?"

S2: Ein Kind hat 98 CHF. Sie möchte sich dafür 8 Bücher kaufen. Wie viel Geld bleibt ihr übrig?

S3: Das Kind hat 98 Bonbons. Diese will es fair an seine 14 Freunde verteilen. Wie viele Bonbons bekommt jedes Kind?

S4: Ein Kind erhält zu Ostern 98 CHF erhalten. ~~Es~~ Es kann sich 7 Bücher kaufen. Wieviel kostet jedes Buch wenn alle Bücher gleich viel kosten?

S5: Ein Kind erhält 98 Franken zu Ostern. Es kauft sich damit so viele Bücher, wie möglich. Die Bücher werden gerecht an 14 Kinder verteilt. Wie viele Bücher erhält jedes Kind?

S6: 98.- werden ~~so~~^{gerecht} an Kinder aufgeteilt, dass sich jedes 7 Bücher kaufen kann.
Wie viel Geld erhält jedes Kind?

Bewerten Sie die Antworten: Vergeben Sie pro Antwort 0 P., ½ P., 1 P., 1 ½ P. oder 2 Punkte und begründen Sie Ihre Bewertungen.

2.4 Division und die Null

- a) Dividieren kann als Umkehrung des Multiplizierens verstanden werden. Begründen Sie auf dieser Grundlage, dass $0 : 1 = 0$ ist.
- b) Begründen Sie auf derselben Grundlage, dass es keine natürliche Zahl n geben kann mit $1 : 0 = n$ („ $1 : 0$ ist in den natürlichen Zahlen nicht definierbar“).
- c) Begründen Sie a) und b) mit Hilfe einer passenden Grundvorstellung für die Division.
- d) Nicole (5. Klasse) schreibt:¹

„Ich bin der Meinung $1 : 0 = 1$, denn wenn man eine Torte hat und man lädt Gäste ein, keiner kommt, die Torte wird also nicht geteilt, so bleibt eine Torte übrig.“

Was entgegnen Sie Nicole? Schreiben Sie ihr einen Brief.

- e) Seydin (4. Klasse) begründet die Aussage, dass $1 : 0$ nicht definiert ist, anders:²
Welche mathematischen Erkenntnisse verbergen sich hinter seiner Erklärung?

Es ist nicht lösbar diese Aufgabe zu lösen ist nicht machbar den man kann die null in jede Zahl unendlich mal rein tun aber das würden wir weiter gehen unendlich 1, 2, 3 und 4 deswegen nicht lösbar

- f) Noch anders argumentiert Ben (4. Klasse):

Was ist von Bens Rechnungen zu halten?
Und von seiner Schlussfolgerung?

$$\begin{aligned}1 : 1 &= 1 \\1 : 0,5 &= 2 \\1 : 0,1 &= 10 \\1 : 0,01 &= 100 \\1 : 0 &\Rightarrow \infty\end{aligned}$$

Durch null kann man nicht dividieren! Das Ergebnis ist immer null.

¹ Quelle: Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997): *Wie Kinder rechnen*, Klett Grundschulverlag, S. 77.

² Quelle: Mönnikes, K. & Lengnink, K. (2011): Weshalb ist Eins durch Null nicht möglich? In: *Pra-xis der Mathematik in der Schule*, 40, S. 39.

2.5 Geschicktes Rechnen

Beantworten Sie folgende Fragen zügig im Kopf (nur im Notfall unter Beizug von Papier und Beispiel, aber ohne Taschenrechner): Versuchen Sie wo immer möglich

„geschickt“ zu rechnen!

- a) $11 + 29$ $724 + 198$
 $89 + 91$ $467 + 990$
 $50 + 70$ $64 + 64 + 64 + 64 + 64$
- b) $167 + 253 - 167$ $22 \cdot 78 + 78^2$
 $236 + 149 - 151$ $14 \cdot 102 + 12 \cdot 102 - 102 \cdot 25$
 $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9$ $152 + 73 - 153 + 73$
- c) $7 \cdot 9$ $18 \cdot 5$
 $8 \cdot 40$ $28 \cdot 25$
 $90 \cdot 80$ $15 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 70$
- d) $6 \cdot 13 + 4 \cdot 13$ $59 \cdot 15 + 18 \cdot 59 + 50 \cdot 33 - 33 \cdot 9$
 $6 \cdot (13 + 7)$ $18 \cdot 80 : 3$
 $6 \cdot 13 - 3 \cdot 6$ $1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 + 1 \cdot 1 + 1 : 1$
- e) $128 \cdot 2$ $560 : 4$
 $628 : 2$ $630 : 70$
 $93 : 3$ $(862 + 865 + 868) : 3$

f) Es gilt: $1479 : 17 = 87$. Was ist folglich $18 \cdot 87$?

g) Setzen Sie für \square das richtige Relationszeichen $<$, $=$ oder $>$ ein, *ohne* die Terme links und rechts von \square „auszurechnen“:

- g₁) $189 + 316 \square 188 + 317$ g₄) $12 \square 105 : 24$
g₂) $317 - 20 + 20 \square 317 - 40$ g₅) $12 - 10 \cdot (16 - 5) \square 2 \cdot (16 - 5)$
g₃) $14 \cdot 17 \square 7 \cdot 34$ g₆) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \square 1$

h) Welche Zahl muss jeweils in der Box stehen? Die Antwort lässt sich jeweils ohne Rechnung finden – erklären Sie stichwortartig, wie Sie auf die Antwort gekommen sind.

- h₁) $28 \cdot 17 = \square \cdot 34$ h₂) $94 - \square = 96 - 86$
h₃) $63 : 7 = \square : 14$ h₄) $267 - \square = 4 - 2$

i) Rechnen Sie möglichst vorteilhaft. Begründen Sie stichwortartig

- j₁) $245 + 149 - 147$ j₂) $(24 + 23) \cdot (24 - 23)$
j₃) $24 \cdot 26 - 12 \cdot 52$ j₄) $38^2 - 39 \cdot 37$

2.6 Schriftliche und halbschriftliche Multiplikation

In der folgenden Teilaufgabe a) geht es um eine *schriftliche Multiplikation*:³

- a1) Berechnen Sie $47 \cdot 43$ nach dem üblichen, schriftlichen Rechenverfahren.
- a2) Für alle zweistelligen Zahlen, deren Einerziffern die Summe 10 ergeben und deren Zehnerziffern gleich sind, hat Özlem eine schnellere Methode zur Multiplikation gefunden:

1. Multipliziere die beiden Einerziffern deiner Faktoren. So erhältst du die Zehner- und Einerziffer des Endergebnisses.

2. Multipliziere die Zehnerziffer der beiden Faktoren mit der um 1 höheren Zahl. So erhältst du die Tausender- und Hunderterziffer des Endergebnisses.

3. Schreibe alle Ziffern zusammen.

Diagram illustrating the trick for $47 \cdot 43$:

$$\begin{array}{r}
 47 \cdot 43 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 7 \cdot 3 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 4 \cdot (4+1) = 20 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \text{TH} \quad \text{ZE} \\
 20 \quad 21 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \text{also } 47 \cdot 43 = 2021
 \end{array}$$

Zeigen Sie an zwei Beispielen, dass Özlems Trick funktioniert.

- a3) Funktioniert Özlems Trick auch für alle zweistelligen Zahlen mit gleichen Zehnerziffern, deren Einerziffern in der Summe *nicht* 10 ergeben? Begründen Sie Ihre Antwort.
- a4) Begründen Sie, weshalb Özlems Trick nicht nur für $47 \cdot 43$, sondern für *alle* zweistelligen Zahlen, deren Einerziffern die Summe 10 ergeben und deren Zehnerziffern gleich sind, garantiert funktioniert (zum Beispiel mit Hilfe des Malkreuzes oder mit Algebra).

In der folgenden, von a) unabhängigen Aufgabe b) geht es um eine *halbschriftliche Multiplikation*:

- b1) Berechnen Sie $12 \cdot 15$ möglichst geschickt, und zwar auf mindestens drei verschiedene Arten. (Hinweis: Gehen Sie *nicht* nach dem Standard-Verfahren der schriftlichen Multiplikation vor bzw. dem Malkreuz, sondern nutzen Sie die Besonderheiten der beiden vorliegenden Faktoren aus.)
- b2) Beschreiben Ihre Vorgehensweisen in b1) bzw. stellen Sie sie ikonisch dar.

³ Quelle: Teilaufgabe a) war Aufgabe 2 im „Leistungsnachweis Fachwissenschaft Mathematik“ (Herbstsemester 2014), in Anlehnung an Hußmann, S., Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. (2012): *mathe-werkstatt Klasse5 – Rechenbausteine Training*, Cornelsen Verlag, S. 53

2.7 Vorgehensweisen bei der Division⁴

Stephan (3. Klasse) geht bei den drei Divisionen $120 : 14$, $168 : 4$ und $228 : 6$ nach verschiedenen Methoden vor:

- Um $120 : 14$ zu berechnen, berechnet er zuerst $120 : 10$, dann $120 : 4$, dann addiert er die beiden Ergebnisse.
- Um $168 : 4$ zu berechnen, berechnet er zuerst $160 : 4$, dann $8 : 4$, dann addiert die beiden Ergebnisse.
- Um $228 : 6$ zu berechnen, berechnet er $228 : 2$ und dieses Ergebnis durch 3.

a) Welche Antwort ist richtig? Kreuzen Sie an:

- Alle drei Methoden sind falsch: Für jede der Methoden gibt es *Zahlenbeispiele*, bei denen sie nicht zum korrekten Ergebnis führen.
- Die für $120 : 14$ verwendete Methode ist korrekt: sie stimmt für *jede* Division.
- Die für $120 : 14$ verwendete Methode ist falsch: es gibt *Zahlenbeispiele*, bei denen sie nicht zum korrekten Ergebnis führt.
- Die für $168 : 4$ verwendete Methode ist korrekt: sie stimmt für *jede* Division.
- Die für $168 : 4$ verwendete Methode ist falsch: es gibt *Zahlenbeispiele*, bei denen sie nicht zum korrekten Ergebnis führt.
- Die für $228 : 6$ verwendete Methode ist korrekt: sie stimmt für *jede* Division.
- Die für $228 : 6$ verwendete Methode ist falsch: es gibt *Zahlenbeispiele*, bei denen sie nicht zum korrekten Ergebnis führt.
- Alle Methoden sind korrekt: sie führen bei jeder Division zur korrekten Lösung.

b) Begründen Sie Ihre Antworten in a): Wie lauten die Regeln, nach denen Stephan vorgeht? Welche seiner Regeln entsprechen mathematischen Umformungsgesetzen (vgl. ex. 1), welche nicht?

⁴ Quelle: In Anlehnung an eine Aufgabe aus dem „Eingangstest Fachwissenschaft MathematikIVU“ (Herbstsemester 2014).

2.8 Arbeitsblatt geschicktes Rechnen:

Bearbeiten Sie das Arbeitsblatt:

<https://angewandte-didaktik.mathematik.uni-mainz.de/files/2019/05/MM-AB-Vorteilhaftes-Rechnen-2016-11-30.pdf>

(Hinweis in den Lösungen bedeutet AdA das Assoziativgesetz der Addition, D das Distributivgesetz und so weiter)

Aufgabe 6 betrifft das geschickte Bruchrechnen. Das Bruchrechnen wird später im Semester noch vertieft.

3 Teiler und Vielfache

3.1 Primfaktoren und Teiler einer natürlichen Zahl⁵ - Pflichtaufgabe

- a) Bestimmen Sie die Primfaktorenzerlegung von 540.
- b) Bestimmen Sie *alle* Teiler von 540 (zum Beispiel mit einem Teiler- oder einem Hasse-Diagramm). Weshalb haben Sie garantiert alle Teiler gefunden?
- c) Begründen Sie (ikonisch und algebraisch), wie aus der Tatsache, dass 30 die Zahl 540 teilt, gefolgert werden kann, dass 30 auch alle Vielfachen von 540 teilt.
- d) Beziehen Sie zu folgenden Schüleraussagen aus mathematischer Sicht Stellung: d₁) Adelina behauptet: „539 ist eine Primzahl, da 539 um 1 kleiner ist als 540.“
d₂) Loris behauptet: „539 ist nicht durch 2, 3 und 5 teilbar. Somit ist 539 auch nicht durch Vielfache dieser Zahlen teilbar. Also 539 kann nur durch 539 und 1 geteilt werden, weshalb 539 eine Primzahl ist.“

3.2 Primzahleigenschaft von natürlichen Zahlen⁶

- a) Analysieren Sie folgendes Verfahren zum Nachweis, dass 103 prim ist (sog. Probedivision): Weshalb müssen für 103 nur die Primzahlen bis und mit 7 als mögliche Teiler in Betracht gezogen werden?

- 2, 3, 5 und 7 sind Primzahlen.
- 103 nicht teilbar durch 2, nicht teilbar durch 3, nicht teilbar durch 5, und nicht teilbar durch 7.
- Die auf 7 folgende, nächstgrössere Primzahl ist 11.
- 11 · 11 aber grösser als 103. Daher braucht 11 nicht mehr als möglicher Teiler von 103 getestet werden.
- Folglich ist 103 eine Primzahl.

- b) Zeigen Sie auf analoge Art und Weise, dass 631 eine Primzahl ist (für eine Tabelle mit allen Primzahlen unter 50 siehe Anhang 3, Aufgabe 6).
- c) Überprüfen Sie, ob 713 eine Primzahl ist oder nicht.
- d) Begründen Sie folgende Regel: Um zu beweisen, dass eine natürliche Zahl n prim ist, reicht der Nachweis, dass alle Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ die Zahl n nicht teilen.

⁵ Quelle: In Anlehnung an Aufgabe 4 des „Leistungsnachweises Fachwissenschaft Mathematik“ (Herbst 2012) bzw. Aufgabe 4 der „Prüfung Fachwissenschaft Mathematik“ (Frühling 2018).

⁶ Quelle: Affolter et al. (2003): *mathbu.ch* 8, Bern : BLMV / Zug: Klett Balmer Verlag, S. 68.

3.3 Teilbarkeitsregeln⁷

- a) Formulieren Sie die Teilbarkeitsregeln für das Teilen durch 3, 4 und 9.
- b) Überprüfen Sie an je einem selbstgewählten (mindestens dreistelligen) Zahlenbeispiel, dass die Teilbarkeitsregeln aus a) korrekt zu sein scheinen.
- c) Begründen Sie, dass die Regel für das Teilen durch 4 nicht nur für Ihr Beispiel, sondern für *alle* natürlichen Zahlen (geschrieben im Dezimalsystem) gilt.
- d) Ein Schulbuch regt zur Entdeckung und Begründung folgender Tatsache an⁸:
Der Rest, der bei der Division einer beliebigen Zahl durch 9 entsteht, ist gleich gross ist wie der Rest, der bei der Division der Anzahl Plättchen, die für das Legen dieser Zahl in einer Stellentafel nötig sind, durch 9 entsteht.

Begründen Sie mit Hilfe des Schulbuchs, weshalb diese Tatsache zutrifft.

Neuner-Reste

8 A Welche Zahlen kannst du an der Stellentafel mit einem einzigen Plättchen legen? Dividiere sie durch 9.

M	HT	ZT	T	H	Z	E
	•					

B Versuche zu erklären, warum du immer den Rest 1 erhältst.

9 A Lege einige Zahlen mit 2 Plättchen und dividiere sie durch 9. Welchen Rest erhältst du jetzt?

M	HT	ZT	T	H	Z	E
	•					

B Überlege, warum das so sein muss.

10 A Lege Zahlen mit 3, 4 oder 5 Plättchen. Dividiere sie wieder durch 9. Vergleiche den Neunerrest mit der Anzahl der Plättchen.

B Was fällt dir auf? Überlege, warum das so sein muss.

11 Wie viele Plättchen braucht man, um die Zahl 311202 zu legen? Dividiere die Zahl durch 9. Welchen Rest erwartest du? Warum?

- e) Leiten Sie aus d) die mathematischen Begründungen für die Teilbarkeitsregeln für das Teilen durch 9 und 3 her.
- f) Nikolai behauptet: „Eine Zahl ist durch 18 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 18 teilbar ist.“ Was ist aus mathematischer Sicht davon zu halten?
- g) Lena behauptet: „Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 18 teilbar, da: $18 = 6 + 6 + 6$.“ Was ist aus mathematischer Sicht davon zu halten?
- h) Formulieren Sie die Regel für das Teilen durch 15 und begründen Sie sie.

⁷ Quelle: Teilaufgaben a)–d) waren Aufgabe 1 im „Leistungsnachweis Fachwissenschaft Mathematik“ (Herbstsemester 2015).

⁸ Quelle: *Zahlenbuch 4*, S. 91

3.4 Grösster gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches

- a) Bearbeiten Sie Aufgabe 5 im *Zahlenbuch 6*, S. 71 (Anhang, verwenden Sie eine der Methoden, die in Aufgabe 3 bzw. 4 des Schulbuchs beschrieben sind).
- b) Bearbeiten Sie Aufgabe 5 aus dem Zahlenbuch noch einmal, nun aber mit der Methode der Primfaktorzerlegung im *Mathbu.ch* (Anhang).
- c) Berechnen Sie den grössten gemeinsamen Teiler von 12'408 und 18'095.
- d) Wie hängt die Methode zur Berechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen im *Zahlenbuch* mit der Berechnungsmethode im *Mathbu.ch* zusammen?
- e) Bearbeiten Sie Aufgabe 6 im *Zahlenbuch 6*, S. 71 (Anhang).
- f) Bearbeiten Sie Aufgabe 7A–7B im *Zahlenbuch 6*, S. 71 (Anhang).
- g) Formulieren Sie aufgrund von f) eine Vermutung, wie das Produkt, der ggT und das kgV zweier beliebiger Zahlen zusammenhängen könnten.
- h) Begründen Sie g) (z.B. mit Hilfe der ikonischen Darstellung der *Vielfachenbögen*, vgl. Anhang, Aufg. 4).

Vielfache

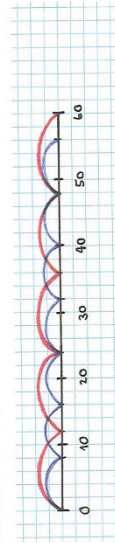
Vielfache einer Zahl und gemeinsame Vielfache zweier Zahlen bestimmen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

- Nimm die Hundertertafel (Kopiervorlage).
 - Kreuze alle Dreierzahlen an. Du erhältst ein Muster.
 - Kreise in der gleichen Hundertertafel alle Viererzahlen mit einer anderen Farbe ein. Du erhältst ein weiteres Muster.
 - Jene Zahlen, die gleichzeitig angekreuzt und eingekreist sind, ergeben ein weiteres Muster. Beschreibe es.
- Lies nebenstehende Erklärungen «Vielfache» und «Gemeinsame Vielfache». Beschreibe mit eigenen Worten den Zusammenhang mit Aufgabe 1.
- Notiere alle Zahlen der 8er-Reihe. Notiere darunter alle Zahlen der 12er-Reihe.
 - Färbe die Zahlen, die in beiden Reihen vorkommen.
 - Notiere die Zahlen aus B der Reihe nach und setze die Reihe fort.
 - Welches ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 8 und 12?

8er-Reihe: 8 16 24 32 40 48 ...
 12er-Reihe: 12 24 36 48 ...
 gemeinsame Vielfache: 24, 48, ...
 Das kleinste gemeinsame Vielfache von 8 und 12 ist ...

- Vergleiche Aufgabe 3 mit dieser Darstellung. Schreibe einen kurzen Bericht und tausche ihn mit jemandem aus.



- Bestimme das kgV der folgenden Zahlenpaare wie in Aufgabe 3.

A	12 und 15	12 und 18	12 und 20	12 und 24	12 und 25	...
B	4 und 5	6 und 5	7 und 5	8 und 5	9 und 5	...
C	2 und 3	3 und 4	4 und 5	5 und 6	6 und 7	...



- Gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache**
 - Suche Zahlenpaare, bei denen der grösste gemeinsame Teiler (ggT) 1 ist.
 - Suche Zahlenpaare, bei denen der ggT eine der beiden Zahlen selber ist.
 - Suche Zahlenpaare, bei denen das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) das Produkt der beiden Zahlen ist.
 - Suche Zahlenpaare, bei denen das kgV eine der beiden Zahlen selber ist.
 - Schreibe einen Bericht zu deinen Erkenntnissen aus A bis D und stelle ihn anderen vor.

- Wähle zwei natürliche Zahlen. Bestimme den ggT und das kgV der beiden Zahlen.
 - Berechne das Produkt der beiden Zahlen und vergleiche es mit dem Produkt des ggT und des kgV der beiden Zahlen.
 - Verfahre mit anderen Zahlenpaaren ebenso. Was stellst du fest? Schreibe einen Bericht und stelle ihn anderen vor.
- Zwei Trams der Linien 11 und 3 eines städtischen Verkehrsbetriebs fahren morgens um 5 Uhr gleichzeitig an der gleichen Endstation ab. Die Linie 11 verkehrt im 9-Minuten-Takt, die Linie 3 im 15-Minuten-Takt.
 - Wann fahren an der Endstation wieder zwei Trams der beiden Linien gleichzeitig ab? Beschreibe, wie du die Ergebnisse gefunden hast.
 - Wie verhält es sich, wenn die Linie 11 den ersten Kurs um 05:10 Uhr im 12-Minuten-Takt und die Linie 3 den ersten Kurs um 05:30 Uhr im 6-Minuten-Takt fährt?
 - Wie verhält es sich, wenn die Linie 11 den ersten Kurs um 05:20 Uhr im 9-Minuten-Takt und die Linie 3 den ersten Kurs um 05:25 Uhr im 12-Minuten-Takt fährt?



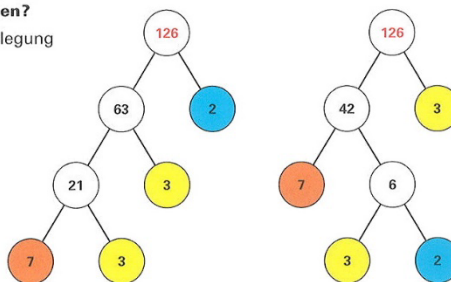


Leonhard Euler (1707–1783) fand die damals grösste bekannte Primzahl: 2 147 483 647. Die im Jahr 2002 grösste bekannte Primzahl wurde vom zwanzigjährigen Michael Cameron mit Hilfe eines weltumspannenden Computernetzwerks entdeckt: $2^{13\,466\,917} - 1$. Sie hat 4 053 946 Stellen. Die aktuellen grössten bekannten Primzahlen findet man im Internet.

Wo braucht man Primzahlen?

Man kann die Primfaktorzerlegung einer Zahl bestimmen.

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$



4 Bestimme sämtliche Teiler der Zahl 126. Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

5 Mit der Primfaktorzerlegung findet man den grössten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) mehrerer Zahlen.

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \quad 32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 \quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(24, 32, 40) = 2^3 = 8 \quad \text{kgV}(24, 32, 40) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$$

Beschreibe allgemein, wie man den ggT und das kgV mehrerer Zahlen findet.

Aus der Geschichte der Primzahlen

So bestimmte Eratosthenes (276 v. Chr. – ca. 195 v. Chr.) die ersten Primzahlen.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
...							

6 Dieses Verfahren nennt man «Sieb des Eratosthenes». Verfasse eine Anleitung.

7 Euklid (300 v. Chr.) bewies, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Das ist seine Beweisidee: Man nimmt an, p sei die grösste Primzahl. Man bildet das Produkt aller Primzahlen $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p$. Nun gilt: Wenn man zu diesem Produkt 1 addiert, erhält man eine Zahl, die entweder selbst Primzahl ist oder aber einen Primteiler grösser als p besitzt.

A Zeige die Beweisidee an einigen Beispielen für Primzahlen p.

B Warum kann man aus diesen Überlegungen schliessen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt?

Vermutungen über Primzahlen (bis 2002 nicht bewiesen)

Zwei Primzahlen, die sich um 2 unterscheiden, heissen «Primzahl-Zwillinge». Beispiel: 17 und 19. Es gibt unendlich viele Primzahl-Zwillinge.

Goldbach-Vermutung: Jede gerade Zahl grösser als 2 lässt sich als Summe von zwei Primzahlen darstellen.

4 Zahlsysteme

4.1 Gewichtssätze und Stellenwertsysteme⁹ - Pflichtaufgabe

Ein *Gewichtssatz* beinhaltet einen Gewichtsstein von 1 kg, einen Gewichtsstein von 2 kg, einen Gewichtsstein von 4 kg und einen Gewichtsstein von 8 kg.

a) Welche Gewichtssteine benötigen Sie, um Gewichte von 1 kg, 2 kg, ..., 15 kg auszuwiegen? Ergänzen Sie die Tabelle, so dass jeweils *grösstmögliche Gewichtssteine* zum Einsatz kommen.

Gewichtssteine Auszuwiegendes Gewicht	8 kg-Gewicht	4 kg-Gewicht	2 kg-Gewicht	1 kg-Gewicht
1 kg				1 ×
2 kg			1 ×	
3 kg			1 ×	1 ×
4 kg		1 ×		
5 kg		1 ×		1 ×
6 kg				
7 kg				
8 kg				
9 kg				
10 kg				
11 kg				
12 kg				
13 kg				
14 kg				
15 kg				

- a) Welche Gewichte lassen sich auszuwiegen, wenn zusätzlich ein 16 kg-Gewichtsstein zur Verfügung steht? Wie muss man den Gewichtssatz erweitern, um grössere Gewichte (z. B. 100 kg) abwiegen zu können?
- b) Ein anderer Gewichtssatz besteht aus je zwei 1 kg-Gewichtssteinen, zwei 3 kg-Gewichtssteinen, zwei 9 kg-Gewichtssteinen und zwei 27 kg-Gewichtssteinen: Erstellen Sie eine Tabelle analog zu a) für das Auswiegen von 1 kg bis 15 kg. Welche neuen Steine sind notwendig zum Auswiegen grösserer Gewichte?
- c) Wie hängen die beiden Gewichtssätze mit Stellenwertsystemen zusammen?
- c) Stellen Sie – nach obigem Prinzip – zwei weitere Gewichtssätze zusammen.
- d) Welche regelmässigen „Muster“ lassen sich in den ausgefüllten Tabellen in a) und c) erkennen (hinsichtlich der eingetragenen „1 ×“ bzw. „2 ×“)? Begründung?
- e) Der Gewichtssatz 1 kg, 3 kg, 5 kg, 7 kg, 9 kg beruht nicht auf Stellenwertsystemen. Warum ist dieser Gewichtssatz mühsam?

⁹ Siehe auch: Krauthausen, G. (2018), *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*, Springer Spektrum, S. 59

4.2 Addieren und Multiplizieren im Fünfersystem¹⁰ - Pflichtaufgabe

- a) Erstellen Sie eine Einspluseins-Tafel für das Fünfer-System (das heisst jeweils bis und mit 10_5 , siehe auch Aufgabe b).
- b) Ergänzen Sie folgende Einsmaleins-Tafel für das Fünfersystem (unter Rückgriff auf die Tabelle in a), das heisst *ohne* Verwendung des Zehnersystems):

„mal“	1_5	2_5	3_5	4_5	10_5
1_5	1_5				10_5
2_5				13_5	
3_5					
4_5			22_5		
10_5					

- c) Berechnen Sie $2344_5 - 404_5 + 114_5$ im Fünfer-System *so geschickt wie nur möglich* (das heisst unter Ausnutzung aller Besonderheiten der vorliegenden Zahlen und ohne jegliche Verwendung des Zehnersystems)

Und: Beschreiben Sie Ihr Vorgehen!

- d) Berechnen Sie $34_5 + 22_5$ im Fünfersystem:
- Mit Hilfe des *schriftlichen Verfahrens* (unter Rückgriff auf a), ohne Zehnersystem)
 - Mit Hilfe des *Legens von Plättchen* (in einer Stellenwerttafel).
- e) Wählen Sie zwei dreistellige Zahlen a und b im Fünfersystem und berechnen sie die Summe $a + b$ und das Produkt $a \cdot b$ schriftlich (unter Rückgriff auf a) und b), ohne Verwendung des Zehnersystems).
- f) Wählen Sie wie in d) zwei dreistellige Zahlen a und b im Fünfersystem, dass ...
- f₁) ... die Summe $a + b$ eine Fünfer-Potenz ist, und berechnen Sie diese Summe schriftlich (im Fünfersystem).
- f₂) ... das Produkt $a \cdot b$ eine Fünfer-Potenz ist, und berechnen Sie dieses Produkt schriftlich (im Fünfersystem).
- f₃) ... die Summe $a + b$ grösstmöglich ist, und berechnen Sie diese Summe schriftlich (im Fünfersystem).
- f₄) ... das Produkt $a \cdot b$ grösstmöglich ist, und berechnen Sie dieses Produkt schriftlich (im Fünfersystem).
- f₅) ... die Summe $a + b$ durch Zwei teilbar ist, und berechnen Sie diese Summe schriftlich (im Fünfersystem).
- f₆) ... das Produkt $a \cdot b$ durch Zwei teilbar ist, und berechnen Sie dieses Produkt schriftlich (im Fünfersystem).

Und: Beschreiben Sie jeweils Ihre Überlegungen bei der Wahl von a und b !

¹⁰ Quelle: In Anlehnung an Aufgabe 1 im „Leistungsnachweis Fachwissenschaft Mathematik“ (Frühlingssemester 2011)

4.3 Andere Zahlensysteme¹¹ - Pflichtaufgabe

- a) Welches ist die grösste fünfstellige Zahl im Zweiersystem? Übersetzen Sie sie ins Zehnersystem!
- b) Wie viele fünfstelligen Zahlen gibt es im Zweiersystem?
- c) Wie viele Stellen haben die Zahlen 200_{10} und 1000_{10} im Zweiersystem?
- d) Rechnen Sie die Zahl 44_{10} ins Fünfersystem um und vervielfachen Sie sie dann. Was fällt Ihnen auf?
- e) Welche Basis hat das System, in dem die grösste vierstellige Zahl $4444_?$ lautet?
- f) Was ergibt $1000 - 1$, wenn die Subtraktion im Neuner-, Achter-,... und im Zweier-System durchgeführt wird?
- g) Welches ist die grösste Zahl im Zehnersystem, deren Darstellung im Sechsersystem vierstellig ist? Und was ist die kleinste Zahl? Begründung?
- h) In welchem Stellenwertsystem wurde jeweils gerechnet? Begründung?
h₁) $385_? + 214_? = 610_?$ h₂) $31_? \cdot 21_? = 1201_?$
- i) Berechnen Sie so geschickt wie nur möglich: $212_6 - (100_6 - 55_6) \cdot 3_6$
- j) Wie lässt sich die Zahl 6242_8 so geschickt wie nur möglich vervierfachen?

¹¹ Quelle: Griesel, H., *Elemente der Mathematik – Klasse 5*, Schroedel Verlag

4.4 Grundlagen

Beantworten Sie folgende Fragen zügig im Kopf (eventuell unter Beizug von Papier und Bleistift, aber auf keinen Fall mit dem Taschenrechner):

- a) Wie viele Zehner enthält die Zahl Viertausendfünfhundertundzwölf?
- b) Tragen Sie in Gedanken in eine Stellentafel elf Zehner, acht Einer und zwei Hunderter ein. Welche Zahl entsteht dadurch?
Nun kommen neun Zehner dazu. Welche Zahl steht jetzt da? Zum Schluss wird die Anzahl der Hunderter verdoppelt. Welche Zahl steht da?
- c) Berechnen Sie so *geschickt wie nur möglich* (das heisst unter Ausnutzung aller Besonderheiten der vorliegenden Zahlen und Operationen):
 $100 + 21'000 - 200 \quad 4'200 - 1'000$
 $40 + 70 + 100 \quad 17'200 + 10'000$
- d) Weshalb lässt sich das Zahlwort „Hundert“ als 10^2 und das Zahlwort „Eins“ als 10^0 schreiben?
Schreiben Sie 10^3 und 10^6 als Dezimalzahl und als Zahlwort.
- e) Berechnen Sie so geschickt wie nur möglich:
 $10 \cdot 10^3 \quad 10^6 - 10^3$
 $10^4 + 10^4$
- f) $1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
 $5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
 $3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1$
- g) $100 \cdot (9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0)$
 $(9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0) : 10$
 $(8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) : 2$
- h) $9 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^0$
 $8 \cdot 10 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^2$
 $6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10^1$
 $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^3$
- i) Berechnen Sie so geschickt wie nur möglich:
 $230'132'022 \cdot 3 + 1 \quad 802'446'800 : 20 + 2$
- j) Wie lauten die Werte der ersten fünf Zweierpotenzen? Und wie lauten die Werte der ersten fünf Fünferpotenzen?

4.5 Zweiersystem spielerisch erfahren¹²

Spielen Sie folgendes Spiel einige Runden lang:

Regel: Man spielt in Kleingruppen. Jede Gruppe hat kleine farbige Kärtchen in den Farben gelb, rot, grün, blau, braun (je 15–20 Stück) und eine schwarze zur Verfügung. Es wird reihum gewürfelt. Man erhält gelbe Karten entsprechend der gewürfelten Zahl. Wer eine 6 würfelt, darf von einem beliebigen Mitspieler eine Karte mit verschlossenen Augen ziehen. Nach jedem Spielzug wird nach den Tauschregeln ausgetauscht.

Tauschregeln:
für zwei gelbe eine rote,
für zwei rote eine grüne,
für zwei grüne eine blaue,
für zwei blaue eine braune
für zwei braune eine schwarze.

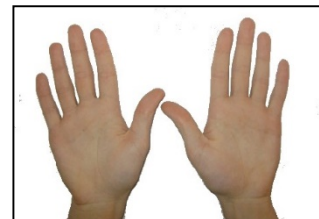
1. Spielen: Wer zuerst eine schwarze Karte hat, hat gewonnen.
2. Denken: Wie kann man feststellen, wer am weitesten ist?
3. Spielen: Jetzt könnt ihr die Spielregeln auch verändern (aber nicht die Tauschregeln!)

- a) Welche zentralen Erfahrungen zum Zweiersystem können in diesem Spiel gemacht werden?
- b) Welche Strategien zum Bewerten eines Spielers erkennen Sie? Auf welche Aspekte eines Stellenwertsystems werden Sie mit diesem Spiel geführt?

4.6 Zweiersystem an den eigenen Fingern erleben¹³

Um Zahlen im Zweiersystem mit den Fingern darzustellen kann man folgendes festlegen:

- Ein ausgestreckter Finger steht für eine „1“
- ein gekrümmter Finger steht für eine „0“.
- Rechts (vom Zählenden aus, Handrücken nach oben) stehen die Einer, nach links fortlaufend die nächst höheren Stufenzahlen, also die Zweier, Vierer, Achter usw.



- a) Wie lautet die grösste Zahl, die sich dann mit zehn Fingern darstellen lässt? Schreiben Sie diese Zahl sowohl im Zweier- wie auch im Zehnersystem.
- b) Wie würde entsprechend die grösste Zahl lauten, die sich mit acht (statt zehn) Fingern darstellen liesse (oder mit zwölf)? Notieren Sie sie im Zehnersystem.
- c) Beantworten Sie die beiden folgenden, allgemeinen Fragen:
 - Wie lautet die grösste Zahl im Zweiersystem, die n Ziffern aufweist?
 - Und wie lautet die grösste Zahl im Zehnersystem, die n Ziffern aufweist?
- d) Wählen Sie einige Zahlen im Zehnersystem, verdoppeln Sie diese und rechnen Sie die Zahl sowie ihr Doppeltes ins Zweiersystem um. Formulieren und begründen Sie eine möglichst einfache „Regel“ für das Verdoppeln im Zweiersystem.
- e) Wie lautet die entsprechende Regel für das Vervierfachen bzw. Verachtfachen?

¹² Quelle: Barzel, Büchter & Leuders (2007), *Mathematik Methodik*, Berlin: Cornelsen Scriptor

¹³ Quelle: Aufgabe 1 im „Leistungsnachweis Fachwissenschaft Mathematik“ (Herbstsemester 2011)

4.7 Multiplikation mit 10 und Division durch 10 im Zehnersystem

- a) Wie erklären Sie einem Kind, dass es auf dasselbe hinausläuft, ob man einen natürlichen Zahl (im Zehnersystem) verzehnfacht oder ihr eine Null „anhängt“?
- b) Erklären Sie folgende Regeln: *„Wird eine Dezimalzahl mit zehn multipliziert, so rückt das Komma um eine Stelle nach rechts. Wird eine Dezimalzahl jedoch durch zehn dividiert, so rückt das Komma um eine Stelle nach links.“*

4.8 Vergleich eines Stellenwert- und eines Additionssystems

- a) Vergleichen Sie das dezimale Stellenwertsystem mit der römischen Zahlendarstellung in Bezug auf ...
- ... die Anzahl der Zahlzeichen („Ziffern“)
 - ... die Null
 - ... die Bündelungseinheiten
 - ... die Abstraktheit der Zahlwörter
 - ... die Addition und Multiplikation
- b) Welche Vor- und Nachteile hat die römische Zahlschrift, welche Vor- und Nachteile hat das Dezimalsystem?

4.9 Schriftliche Division in nichtdezimalen Stellenwertsystemen

- a) Führen Sie die folgende Division schriftlich aus, und zwar ohne ins Dezimalsystem umzurechnen:

$$21'202_3 : 11_3$$

Lassen Sie sich dabei vom Vorgehen leiten, das Sie von der schriftlichen Division im Dezimalsystem kennen, und passen Sie es geeignet an¹⁴.

- b) Wie heisst die Zahl $\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = 0.\overline{3}_{10}$ im Dreiersystem?

Und wie heisst $\left(\frac{1}{10}\right)_{10} = 0.1_{10}$ im Dreiersystem?

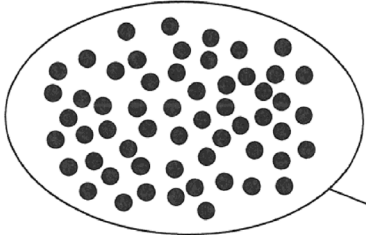
- c) Welche Schwierigkeiten könnten Schülerinnen und Schüler bei der schriftlichen Division von Zahlen im Dezimalsystem haben?

¹⁴ Quelle: In Anlehnung an Aufgabe 2.b) in der „Prüfung Fachwissenschaft Mathematik“ (Frühlingssemester 2018)

4.10 Typische Fehler zum Stellenwertsystem¹⁵

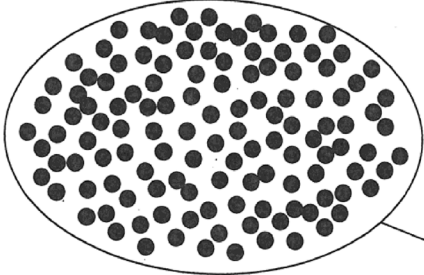
- a) Analysieren Sie folgende Antworten einer Schülerin: Was ist gut gelaufen? Was ist schief gelaufen? Was könnte sich das Kind gedacht haben?

Hier sind 57 schwarze Punkte. Wie viele „Zehnerpäckchen“ oder Zehnerbündel kannst du machen?



Antwort: ...7.....

Hier sind 124 schwarze Punkte. Wie viele „Zehnerpäckchen“ oder Zehnerbündel kannst du machen?



Antwort: ...11.....

- b) Eine andere Schülerin beantwortet die zweite Frage in a) mit „20 Zehner, ein 4“: Was ist hier gut bzw. schief gelaufen? Was könnte sie sich gedacht haben?
- c) Analysieren Sie folgende Antwort eines Schülers: Was ist gut gelaufen? Was ist schief gelaufen? Was könnte sich der Schüler gedacht haben?

a) Schreibe als Zahl auf: 1 Tausender, 5 Hunderter, 3 Einer

Zahl in der Stellentafel: Die Zahl heißt:

T	H	Z	E
1	5		3

153

- d) Entwickeln Sie Vorschläge, damit die drei Kinder Aufgaben wie in a) und c) lösen lernen (zum Beispiel eine Anschlussaufgabe, den Einsatz von Anschauungsmaterial etc.)? Gehen Sie dabei von den Stärken der Kinder aus.

¹⁵ Quelle: Studie von Moser Opitz, E. (2007), *Rechenschwäche und Dyskalkulie*, Haupt Verlag. Für weitere Schülerdokumente zu diesen Aufgaben siehe Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010), *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*, Springer Verlag, S. 134f.; Prediger, S. et al. (2013), Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristiger Reparatur, In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, 55(51), S. 13; Freesemann, O. (2014), *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern*, Springer Verlag, S. 176–180.

4.11 Zahlenraten

a) Erklären Sie, wie und warum der folgende „Zaubertrick“ funktioniert:

<table border="1"> <tbody> <tr><td>1</td><td>33</td><td>65</td><td>97</td></tr> <tr><td>3</td><td>35</td><td>67</td><td>99</td></tr> <tr><td>5</td><td>37</td><td>69</td><td>101</td></tr> <tr><td>7</td><td>39</td><td>71</td><td>103</td></tr> <tr><td>9</td><td>41</td><td>73</td><td>105</td></tr> <tr><td>11</td><td>43</td><td>75</td><td>107</td></tr> <tr><td>13</td><td>45</td><td>77</td><td>109</td></tr> <tr><td>15</td><td>47</td><td>79</td><td>111</td></tr> <tr><td>17</td><td>49</td><td>81</td><td>113</td></tr> <tr><td>19</td><td>51</td><td>83</td><td>115</td></tr> <tr><td>21</td><td>53</td><td>85</td><td>117</td></tr> <tr><td>23</td><td>55</td><td>87</td><td>119</td></tr> <tr><td>25</td><td>57</td><td>89</td><td>121</td></tr> <tr><td>27</td><td>59</td><td>91</td><td>123</td></tr> <tr><td>29</td><td>61</td><td>93</td><td>125</td></tr> <tr><td>31</td><td>63</td><td>95</td><td>127</td></tr> </tbody> </table>	1	33	65	97	3	35	67	99	5	37	69	101	7	39	71	103	9	41	73	105	11	43	75	107	13	45	77	109	15	47	79	111	17	49	81	113	19	51	83	115	21	53	85	117	23	55	87	119	25	57	89	121	27	59	91	123	29	61	93	125	31	63	95	127	<table border="1"> <tbody> <tr><td>2</td><td>34</td><td>66</td><td>98</td></tr> <tr><td>3</td><td>35</td><td>67</td><td>99</td></tr> <tr><td>6</td><td>38</td><td>70</td><td>102</td></tr> <tr><td>7</td><td>39</td><td>71</td><td>103</td></tr> <tr><td>10</td><td>42</td><td>74</td><td>106</td></tr> <tr><td>11</td><td>43</td><td>75</td><td>107</td></tr> <tr><td>14</td><td>46</td><td>78</td><td>110</td></tr> <tr><td>15</td><td>47</td><td>79</td><td>111</td></tr> <tr><td>18</td><td>50</td><td>82</td><td>114</td></tr> <tr><td>19</td><td>51</td><td>83</td><td>115</td></tr> <tr><td>22</td><td>54</td><td>86</td><td>118</td></tr> <tr><td>23</td><td>55</td><td>87</td><td>119</td></tr> <tr><td>26</td><td>58</td><td>90</td><td>122</td></tr> <tr><td>27</td><td>59</td><td>91</td><td>123</td></tr> <tr><td>30</td><td>62</td><td>94</td><td>126</td></tr> <tr><td>31</td><td>63</td><td>95</td><td>127</td></tr> </tbody> </table>	2	34	66	98	3	35	67	99	6	38	70	102	7	39	71	103	10	42	74	106	11	43	75	107	14	46	78	110	15	47	79	111	18	50	82	114	19	51	83	115	22	54	86	118	23	55	87	119	26	58	90	122	27	59	91	123	30	62	94	126	31	63	95	127	<table border="1"> <tbody> <tr><td>4</td><td>36</td><td>68</td><td>100</td></tr> <tr><td>5</td><td>37</td><td>69</td><td>101</td></tr> <tr><td>6</td><td>38</td><td>70</td><td>102</td></tr> <tr><td>7</td><td>39</td><td>71</td><td>103</td></tr> <tr><td>12</td><td>44</td><td>76</td><td>108</td></tr> <tr><td>13</td><td>45</td><td>77</td><td>109</td></tr> <tr><td>14</td><td>46</td><td>78</td><td>110</td></tr> <tr><td>15</td><td>47</td><td>79</td><td>111</td></tr> <tr><td>20</td><td>52</td><td>84</td><td>116</td></tr> <tr><td>21</td><td>53</td><td>85</td><td>117</td></tr> <tr><td>22</td><td>54</td><td>86</td><td>118</td></tr> <tr><td>23</td><td>55</td><td>87</td><td>119</td></tr> <tr><td>28</td><td>60</td><td>92</td><td>124</td></tr> <tr><td>29</td><td>61</td><td>93</td><td>125</td></tr> <tr><td>30</td><td>62</td><td>94</td><td>126</td></tr> <tr><td>31</td><td>63</td><td>95</td><td>127</td></tr> </tbody> </table>	4	36	68	100	5	37	69	101	6	38	70	102	7	39	71	103	12	44	76	108	13	45	77	109	14	46	78	110	15	47	79	111	20	52	84	116	21	53	85	117	22	54	86	118	23	55	87	119	28	60	92	124	29	61	93	125	30	62	94	126	31	63	95	127
1	33	65	97																																																																																																																																																																																															
3	35	67	99																																																																																																																																																																																															
5	37	69	101																																																																																																																																																																																															
7	39	71	103																																																																																																																																																																																															
9	41	73	105																																																																																																																																																																																															
11	43	75	107																																																																																																																																																																																															
13	45	77	109																																																																																																																																																																																															
15	47	79	111																																																																																																																																																																																															
17	49	81	113																																																																																																																																																																																															
19	51	83	115																																																																																																																																																																																															
21	53	85	117																																																																																																																																																																																															
23	55	87	119																																																																																																																																																																																															
25	57	89	121																																																																																																																																																																																															
27	59	91	123																																																																																																																																																																																															
29	61	93	125																																																																																																																																																																																															
31	63	95	127																																																																																																																																																																																															
2	34	66	98																																																																																																																																																																																															
3	35	67	99																																																																																																																																																																																															
6	38	70	102																																																																																																																																																																																															
7	39	71	103																																																																																																																																																																																															
10	42	74	106																																																																																																																																																																																															
11	43	75	107																																																																																																																																																																																															
14	46	78	110																																																																																																																																																																																															
15	47	79	111																																																																																																																																																																																															
18	50	82	114																																																																																																																																																																																															
19	51	83	115																																																																																																																																																																																															
22	54	86	118																																																																																																																																																																																															
23	55	87	119																																																																																																																																																																																															
26	58	90	122																																																																																																																																																																																															
27	59	91	123																																																																																																																																																																																															
30	62	94	126																																																																																																																																																																																															
31	63	95	127																																																																																																																																																																																															
4	36	68	100																																																																																																																																																																																															
5	37	69	101																																																																																																																																																																																															
6	38	70	102																																																																																																																																																																																															
7	39	71	103																																																																																																																																																																																															
12	44	76	108																																																																																																																																																																																															
13	45	77	109																																																																																																																																																																																															
14	46	78	110																																																																																																																																																																																															
15	47	79	111																																																																																																																																																																																															
20	52	84	116																																																																																																																																																																																															
21	53	85	117																																																																																																																																																																																															
22	54	86	118																																																																																																																																																																																															
23	55	87	119																																																																																																																																																																																															
28	60	92	124																																																																																																																																																																																															
29	61	93	125																																																																																																																																																																																															
30	62	94	126																																																																																																																																																																																															
31	63	95	127																																																																																																																																																																																															
<table border="1"> <tbody> <tr><td>8</td><td>40</td><td>72</td><td>104</td></tr> <tr><td>9</td><td>41</td><td>73</td><td>105</td></tr> <tr><td>10</td><td>42</td><td>74</td><td>106</td></tr> <tr><td>11</td><td>43</td><td>75</td><td>107</td></tr> <tr><td>12</td><td>44</td><td>76</td><td>108</td></tr> <tr><td>13</td><td>45</td><td>77</td><td>109</td></tr> <tr><td>14</td><td>46</td><td>78</td><td>110</td></tr> <tr><td>15</td><td>47</td><td>79</td><td>111</td></tr> <tr><td>24</td><td>56</td><td>88</td><td>120</td></tr> <tr><td>25</td><td>57</td><td>89</td><td>121</td></tr> <tr><td>26</td><td>58</td><td>90</td><td>122</td></tr> <tr><td>27</td><td>59</td><td>91</td><td>123</td></tr> <tr><td>28</td><td>60</td><td>92</td><td>124</td></tr> <tr><td>29</td><td>61</td><td>93</td><td>125</td></tr> <tr><td>30</td><td>62</td><td>94</td><td>126</td></tr> <tr><td>31</td><td>63</td><td>95</td><td>127</td></tr> </tbody> </table>	8	40	72	104	9	41	73	105	10	42	74	106	11	43	75	107	12	44	76	108	13	45	77	109	14	46	78	110	15	47	79	111	24	56	88	120	25	57	89	121	26	58	90	122	27	59	91	123	28	60	92	124	29	61	93	125	30	62	94	126	31	63	95	127	<table border="1"> <tbody> <tr><td>16</td><td>48</td><td>80</td><td>112</td></tr> <tr><td>17</td><td>49</td><td>81</td><td>113</td></tr> <tr><td>18</td><td>50</td><td>82</td><td>114</td></tr> <tr><td>19</td><td>51</td><td>83</td><td>115</td></tr> <tr><td>20</td><td>52</td><td>84</td><td>116</td></tr> <tr><td>21</td><td>53</td><td>85</td><td>117</td></tr> <tr><td>22</td><td>54</td><td>86</td><td>118</td></tr> <tr><td>23</td><td>55</td><td>87</td><td>119</td></tr> <tr><td>24</td><td>56</td><td>88</td><td>120</td></tr> <tr><td>25</td><td>57</td><td>89</td><td>121</td></tr> <tr><td>26</td><td>58</td><td>90</td><td>122</td></tr> <tr><td>27</td><td>59</td><td>91</td><td>123</td></tr> <tr><td>28</td><td>60</td><td>92</td><td>124</td></tr> <tr><td>29</td><td>61</td><td>93</td><td>125</td></tr> <tr><td>30</td><td>62</td><td>94</td><td>126</td></tr> <tr><td>31</td><td>63</td><td>95</td><td>127</td></tr> </tbody> </table>	16	48	80	112	17	49	81	113	18	50	82	114	19	51	83	115	20	52	84	116	21	53	85	117	22	54	86	118	23	55	87	119	24	56	88	120	25	57	89	121	26	58	90	122	27	59	91	123	28	60	92	124	29	61	93	125	30	62	94	126	31	63	95	127	<table border="1"> <tbody> <tr><td>32</td><td>48</td><td>96</td><td>112</td></tr> <tr><td>33</td><td>49</td><td>97</td><td>113</td></tr> <tr><td>34</td><td>50</td><td>98</td><td>114</td></tr> <tr><td>35</td><td>51</td><td>99</td><td>115</td></tr> <tr><td>36</td><td>52</td><td>100</td><td>116</td></tr> <tr><td>37</td><td>53</td><td>101</td><td>117</td></tr> <tr><td>38</td><td>54</td><td>102</td><td>118</td></tr> <tr><td>39</td><td>55</td><td>103</td><td>119</td></tr> <tr><td>40</td><td>56</td><td>104</td><td>120</td></tr> <tr><td>41</td><td>57</td><td>105</td><td>121</td></tr> <tr><td>42</td><td>58</td><td>106</td><td>122</td></tr> <tr><td>43</td><td>59</td><td>107</td><td>123</td></tr> <tr><td>44</td><td>60</td><td>108</td><td>124</td></tr> <tr><td>45</td><td>61</td><td>109</td><td>125</td></tr> <tr><td>46</td><td>62</td><td>110</td><td>126</td></tr> <tr><td>47</td><td>63</td><td>111</td><td>127</td></tr> </tbody> </table>	32	48	96	112	33	49	97	113	34	50	98	114	35	51	99	115	36	52	100	116	37	53	101	117	38	54	102	118	39	55	103	119	40	56	104	120	41	57	105	121	42	58	106	122	43	59	107	123	44	60	108	124	45	61	109	125	46	62	110	126	47	63	111	127
8	40	72	104																																																																																																																																																																																															
9	41	73	105																																																																																																																																																																																															
10	42	74	106																																																																																																																																																																																															
11	43	75	107																																																																																																																																																																																															
12	44	76	108																																																																																																																																																																																															
13	45	77	109																																																																																																																																																																																															
14	46	78	110																																																																																																																																																																																															
15	47	79	111																																																																																																																																																																																															
24	56	88	120																																																																																																																																																																																															
25	57	89	121																																																																																																																																																																																															
26	58	90	122																																																																																																																																																																																															
27	59	91	123																																																																																																																																																																																															
28	60	92	124																																																																																																																																																																																															
29	61	93	125																																																																																																																																																																																															
30	62	94	126																																																																																																																																																																																															
31	63	95	127																																																																																																																																																																																															
16	48	80	112																																																																																																																																																																																															
17	49	81	113																																																																																																																																																																																															
18	50	82	114																																																																																																																																																																																															
19	51	83	115																																																																																																																																																																																															
20	52	84	116																																																																																																																																																																																															
21	53	85	117																																																																																																																																																																																															
22	54	86	118																																																																																																																																																																																															
23	55	87	119																																																																																																																																																																																															
24	56	88	120																																																																																																																																																																																															
25	57	89	121																																																																																																																																																																																															
26	58	90	122																																																																																																																																																																																															
27	59	91	123																																																																																																																																																																																															
28	60	92	124																																																																																																																																																																																															
29	61	93	125																																																																																																																																																																																															
30	62	94	126																																																																																																																																																																																															
31	63	95	127																																																																																																																																																																																															
32	48	96	112																																																																																																																																																																																															
33	49	97	113																																																																																																																																																																																															
34	50	98	114																																																																																																																																																																																															
35	51	99	115																																																																																																																																																																																															
36	52	100	116																																																																																																																																																																																															
37	53	101	117																																																																																																																																																																																															
38	54	102	118																																																																																																																																																																																															
39	55	103	119																																																																																																																																																																																															
40	56	104	120																																																																																																																																																																																															
41	57	105	121																																																																																																																																																																																															
42	58	106	122																																																																																																																																																																																															
43	59	107	123																																																																																																																																																																																															
44	60	108	124																																																																																																																																																																																															
45	61	109	125																																																																																																																																																																																															
46	62	110	126																																																																																																																																																																																															
47	63	111	127																																																																																																																																																																																															
<table border="1"> <tbody> <tr><td>64</td><td>80</td><td>96</td><td>112</td></tr> <tr><td>65</td><td>81</td><td>97</td><td>113</td></tr> <tr><td>66</td><td>82</td><td>98</td><td>114</td></tr> <tr><td>67</td><td>83</td><td>99</td><td>115</td></tr> <tr><td>68</td><td>84</td><td>100</td><td>116</td></tr> <tr><td>69</td><td>85</td><td>101</td><td>117</td></tr> <tr><td>70</td><td>86</td><td>102</td><td>118</td></tr> <tr><td>71</td><td>87</td><td>103</td><td>119</td></tr> <tr><td>72</td><td>88</td><td>104</td><td>120</td></tr> <tr><td>73</td><td>89</td><td>105</td><td>121</td></tr> <tr><td>74</td><td>90</td><td>106</td><td>122</td></tr> <tr><td>75</td><td>91</td><td>107</td><td>123</td></tr> <tr><td>76</td><td>92</td><td>108</td><td>124</td></tr> <tr><td>77</td><td>93</td><td>109</td><td>125</td></tr> <tr><td>78</td><td>94</td><td>110</td><td>126</td></tr> <tr><td>79</td><td>95</td><td>111</td><td>127</td></tr> </tbody> </table>	64	80	96	112	65	81	97	113	66	82	98	114	67	83	99	115	68	84	100	116	69	85	101	117	70	86	102	118	71	87	103	119	72	88	104	120	73	89	105	121	74	90	106	122	75	91	107	123	76	92	108	124	77	93	109	125	78	94	110	126	79	95	111	127	<p>Schneide die 7 Zahlenkarten aus.</p> <p>Dein Partner soll sich eine natürliche Zahl zwischen 1 und 127 ausdenken.</p> <p>Gib ihm dann die sieben Karten.</p> <p>Er soll nun diejenigen Karten aussortieren, auf denen seine Geheimzahl steht, und sie dir geben.</p> <p>Nun kannst du auf sehr einfache Weise seine Zahl ermitteln.</p>	<p>Zahlenraten</p> <p>???</p>																																																																																																																																
64	80	96	112																																																																																																																																																																																															
65	81	97	113																																																																																																																																																																																															
66	82	98	114																																																																																																																																																																																															
67	83	99	115																																																																																																																																																																																															
68	84	100	116																																																																																																																																																																																															
69	85	101	117																																																																																																																																																																																															
70	86	102	118																																																																																																																																																																																															
71	87	103	119																																																																																																																																																																																															
72	88	104	120																																																																																																																																																																																															
73	89	105	121																																																																																																																																																																																															
74	90	106	122																																																																																																																																																																																															
75	91	107	123																																																																																																																																																																																															
76	92	108	124																																																																																																																																																																																															
77	93	109	125																																																																																																																																																																																															
78	94	110	126																																																																																																																																																																																															
79	95	111	127																																																																																																																																																																																															

b) Wie viele Karten wären nötig, um alle Zahlen von 1 bis 500 bzw. von 1 bis 1000 erraten zu können? Welche Zahlen würden dann auf der ersten Karte stehen?

5 Bruchrechnen

5.1 Modelle von Bruchzahlen und Bruchrechnen – Pflichtaufgabe

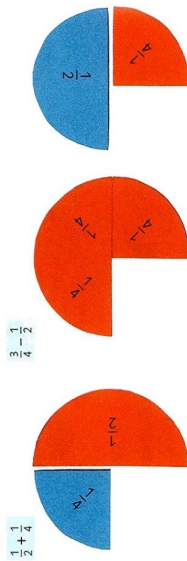
- a) Arbeiten Sie ein Dutzend Rechnungen aus Aufgaben 2 bis 4 im *Zahlenbuch 5*, S. 74f. (Kopie nächste Seite) ohne Taschenrechner, sondern mit einem der im Zahlenbuch angegebenen Modelle durch. Welches Modell bevorzugen Sie für welche Aufgabe? Warum? Notieren Sie Ihre Überlegungen.
- b) Welche Aspekte an den „Igel“-Rechnungen könnten für Kinder herausfordernder sein als an den anderen Aufgaben?
- c) Arbeiten Sie ganz allgemein die Stärken und Schwächen der besprochenen Modelle für Brüche (Kreis-, Rechteck-, Strecken- und Größenmodell) heraus, ...
- c₁) ... einmal für das Darstellen von Bruchzahlen und ...
- c₂) ... einmal für das Rechnen mit Bruchzahlen heraus.
- d) Argumentieren Sie, ...
- d₁) ... welche Modelle von schwachen Schülerinnen und Schülern weshalb bevorzugt werden könnten, und ...
- d₂) ... welche Modelle schwachen Schülerinnen und Schülern welche Probleme bereiten könnten.

Modelle für Brüche 2

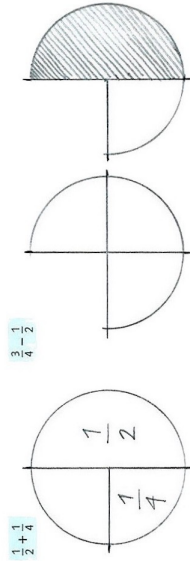
Vorstellungen von Brüchen und vom Operieren mit Brüchen entwickeln

1 Erkläre jemandem in der Klasse, wie die Kinder vorgegangen sind.

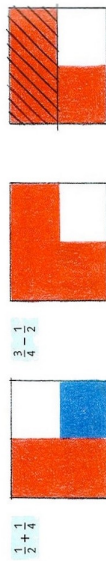
A Anna legt mit ihren Bruchteilen.



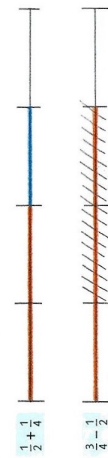
B Barbara arbeitet mit der Zeichenuhr.



C Christian benutzt das Rechteckmodell auf unliniertem Papier.



D Demian wählt das Streckenmodell.



E Eric verwendet das Grössenmodell.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ h} + \frac{1}{4} \text{ h} = 30 \text{ min} + 15 \text{ min} = 45 \text{ min} = \frac{3}{4} \text{ h}$$

$$\frac{1}{2} \text{ m} + \frac{1}{4} \text{ m} = 50 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 75 \text{ cm} = \frac{3}{4} \text{ m}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ h} - \frac{1}{2} \text{ h} = 45 \text{ min} - 30 \text{ min} = 15 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ h}$$

$$\frac{3}{4} | - \frac{1}{2} | = 0,75 | - 0,5 | = 0,25 | = \frac{1}{4} |$$

2 Wähle zur Bearbeitung der folgenden Bruchrechnungen verschiedene Modelle:

- Legen mit Bruchteilen
- Darstellen mit der Zeichenuhr, im Rechteckmodell oder im Streckenmodell
- Übertragen ins Grössenmodell

3 Entscheide selber, wie du vorgehen willst.

A	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	B	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$	C	$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$	D	$\frac{3}{4} - \frac{1}{10}$	E	$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$		$\frac{2}{3} + \frac{2}{4}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{10}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$		$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{20}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$		$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{30}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$		$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{60}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{2}{3} + \frac{2}{5}$		$\frac{3}{4} - \frac{2}{8}$		$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{10}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{2}{3} + \frac{3}{6}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{10}$		$\frac{2}{3} + \frac{1}{12}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{12}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{2}{3} + \frac{1}{10}$		$\frac{3}{4} - \frac{2}{10}$		$\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$		$\frac{3}{4} - \frac{2}{15}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{2}{3} + \frac{2}{10}$		$\frac{3}{4} - \frac{3}{10}$		$\frac{2}{3} + \frac{1}{18}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{18}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$
	$\frac{2}{3} + \frac{3}{10}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{10}$		$\frac{2}{3} + \frac{1}{20}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{20}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

4 Versuche, auch solche Aufgaben mit einem Modell darzustellen.

5 Erfinde weitere Aufgaben. Stelle deinen Lösungsweg jeweils mit einem anderen Modell dar. Tauscht die Aufgaben untereinander aus und kontrolliert euch gegenseitig.

5.2 Brüche bei Brüchen – Pflichtaufgabe

Manche Eigenschaften, die für die natürlichen Zahlen gelten, gelten nicht mehr für Bruchzahlen. So ist jede natürliche Zahl genau auf *eine* Art darstellbar (von verschiedenen Zahlssystemen abgesehen), Bruchzahlen hingegen lassen auf unendlich viele verschiedene Arten als *gemeinen Bruch* darstellen.

- a) Wählen Sie eine beliebige Bruchzahl und stellen Sie sie auf drei verschiedene Arten als gemeinen Bruch dar.
- b) Nennen Sie möglichst viele weitere Eigenschaften natürlicher Zahlen und des Rechnens mit natürlichen Zahlen, die für Bruchzahlen nicht gelten.
- c) Kinder gehen häufig davon aus, dass eine Eigenschaft, die sie von den natürlichen Zahlen kennen, „automatisch“ auch für Bruchzahlen gilt: Erfinden Sie drei Fehler beim Umgang mit Bruchzahlen bzw. beim Bruchrechnen, die auf eine derartige (falsche) Verallgemeinerung zurückzuführen sind.

5.3 Bruchrechnen an Modellen I – Pflichtaufgabe

a) Berechnen Sie folgende Rechnungen mit Hilfe des Rechteckmodells:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{7} \qquad \frac{7}{5} - \frac{3}{4} \qquad \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \qquad \frac{8}{11} : \frac{1}{3}$$

b) Erklären Sie die allgemeine Additionsregel für Bruchzahlen am Rechteckmodell

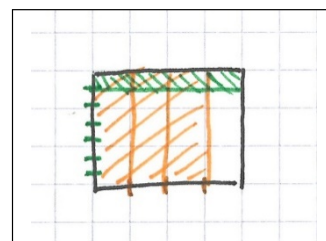
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Analysieren Sie insbesondere:

- Wo lassen sich die Zähler und Nenner (also a , b , c und d) der allgemeinen Additionsregel im Rechteck ablesen?
- Und wo lassen sich die Terme $a \cdot d$, $c \cdot b$ und $b \cdot d$ ablesen?

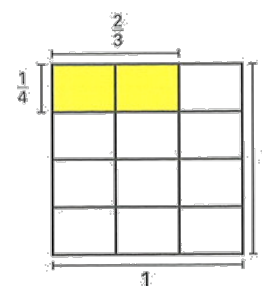
b) Seraina löst die Aufgabe a₁), in dem sie zuerst $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{7}$ in ihr Rechteck auf Karopapier einträgt (vgl. Abb. rechts):

Beurteilen Sie ihre Darstellungen der beiden Summanden aus fachlicher Sicht.



c) Die Multiplikation von Bruchzahlen lässt sich mit Hilfe des Rechteckmodells verständlich machen, als Anteil vom Anteil. Wie die Abbildung rechts zeigt, kann sie aber auch als Flächeninhalt in einem Einheitsquadrat (= Quadrat mit der Seitenlänge 1) gedeutet werden¹⁶:

Erklären Sie, wie vorzugehen ist, um Bruchzahlen im Einheitsquadrat zu multiplizieren.



d) Berechnen Sie die Multiplikation in a₃) mit Hilfe des Einheitsquadratmodells

e) Erklären Sie die Multiplikationsregel für Bruchzahlen $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

$$\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ an Hand des Einheitsquadratmodells.}$$

f) Welche Unterschiede lassen sich zwischen der Multiplikation von Bruchzahlen mit Hilfe des Rechteckmodells und der Multiplikation von Bruchzahlen mit Hilfe des Einheitsquadrates ausmachen?

¹⁶ Quelle: Affolter et. al. (2003): *mathbu.ch* 8, Bern : BLMV / Zug: Klett Balmer Verlag, S. 7.

5.4 Grundlagen

Beantworten Sie folgende Fragen zügig *im Kopf* (ohne TR). Falls Sie erkennen, wie eine Frage „möglichst geschickt“ beantwortet werden kann, dann tun Sie es!

- a) Berechnen Sie (Ergebnis als gekürzten Bruch angeben)

$$3 + \frac{1}{5}$$

$$4 \cdot \frac{1}{7}$$

$$6 \cdot \frac{2}{3}$$

$$5 - \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{5} \cdot 7$$

$$4 \cdot \frac{9}{13} + 9 \cdot \frac{9}{13}$$

$$\frac{7}{3} + \frac{3}{7} - \frac{1}{3}$$

- b) Berechnen Sie (Ergebnis als gekürzten Bruch angeben):

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{2}{6}$$

$$5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 4$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} : \frac{6}{8}$$

- c) Berechnen Sie (Ergebnis als Dezimalbruch angeben):

$$0,63 + 0,4$$

$$0,95 \cdot 17$$

$$2,4 \cdot 0,5$$

$$22 \cdot 3,03$$

- d) Setzen Sie für \square das richtige Relationszeichen $<$, $=$ oder $>$ bzw. die richtige(n) Zahl(en) ein, ohne die Terme links und rechts von \square zu „berechnen“:

$$d_1) \frac{2}{7} \square \frac{3}{7}$$

$$d_5) \frac{1}{50} + \frac{1}{31} \square \frac{1}{31} + \frac{1}{51}$$

$$d_2) \frac{2}{3} \square \frac{2}{5}$$

$$\square d_6) \frac{2}{3} \cdot \square = \frac{4}{15}$$

$$d_3) \frac{1}{7} \square \frac{2}{9}$$

$$d_7) 0,5 \square 0,13$$

$$d_4) \frac{2}{5} \square \frac{5}{12}$$

$$d_8) 0,1 \square 0,100$$

- e) Nennen Sie zwei verschiedene Brüche, die zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 bzw. zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$ liegen, und sortieren Sie sie der Grösse nach.

- f) Wie viele Zehntel stellt 0,6 dar? Und 0,40?

Wie viele Hundertstel stellt 0,23 dar? Wie viele Tausendstel stellt 0,23 dar?

- g) Stellen Sie 0,1 bzw. $-0,22$ bzw. 1,56 als gekürzte Brüche dar.

- h) · Wie viel ist die Hälfte von $\frac{3}{20}$?

· Wie viel ist 2% von 50?

a. Wie viel ist drei Zehntel von 20?

· Wie viel ist 90% von 150?

b. Wie viel ist zwei Drittel von 500?

· Wie viel ist 150% von 14?

- i) Geben Sie drei Brüche mit periodischen Dezimalbruchentwicklungen an.

5.5 Folgen von Bruchzahlen untersuchen I¹⁷

- a) Wählen Sie zwei Bruchzahlen a_1 und a_2 und stellen Sie sie als gewöhnliche Brüche dar. Berechnen Sie – von Hand – daraus die Bruchzahlen
- b) $a_3 = \frac{a_2+1}{a_1}$, $a_4 = \frac{a_3+1}{a_2}$ und immer so weiter. Kürzen Sie nach jedem Schritt.
- c) Wählen Sie zwei andere Bruchzahlen a_1 und a_2 als Startwerte und berechnen Sie noch einmal die Folge der Bruchzahlen $a_3, a_4, a_5, \dots, a_9$: Welches Phänomen beobachten Sie?
- d) Formulieren Sie eine Vermutung und beweisen Sie sie algebraisch.
- e) Tritt das in c) formulierte und bewiesene Phänomen auch auf, wenn a_1 und a_2 zwei natürliche Zahlen sind? Und tritt es auch auf, wenn $a_1 = a_2$?

5.6 Folgen von Bruchzahlen untersuchen II¹⁸

- a) Wählen Sie zwei Bruchzahlen a und b und stellen Sie sie als gewöhnliche Brüche dar. Berechnen Sie daraus – von Hand – die Zahlen c, d und e , und zwar wie folgt: $c = a + b$, $d = b + c$ und dann $e = c + d$.
- b) Wie muss – bei vorgegebenem Wert von $a = 1/5$ – der Wert von b gewählt werden, damit die Zielzahl e den Wert 1 hat?
- c) Beschreiben Sie mit einem algebraischen Term, wie allgemein die Zielzahl $e = 1$ aus den Startzahlen a und b berechnet werden kann.

¹⁷ Quelle: Müller et. al. (2004): *Arithmetik als Prozess*, Seelze: Kallmeyer Verlag, S. 93.

¹⁸ Quelle: Affolter et. al. (2003): *mathbu.ch 8 – Arbeitsheft 8+*, BLMV / Klett Balmer, S. 17.

5.7 Bruchrechnen an Modellen II¹⁹

- a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke, einmal mit dem in der Primarschule üblichen Rechenverfahren, und einmal mit Hilfe eines Grössenmodells:

$$\frac{8}{5} + \frac{5}{6}$$

$$\frac{8}{5} - \frac{5}{6}$$

- b) Berechnen Sie folgende Multiplikation mit dem in der Primarschule üblichen Rechenverfahren, und einmal mit Hilfe des Rechteckmodells (Ergebnis als echten Bruch angeben):

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{6}$$

- c) Berechnen Sie folgende Division von Hand mit dem in der Primarschule üblichen Rechenverfahren (Ergebnis als echten Bruch angeben): $\frac{12}{21} : \frac{6}{7}$

- d) Formulieren Sie die Regel, nach der Sie vorgehen

- e) Stephan nimmt zur Berechnung von c) zuerst folgende Umformung vor:

$$\frac{12}{21} : \frac{6}{7} = \frac{12:6}{21:7}$$

Formulieren Sie eine Regel zu Stephans Vorgehen. Ist das Vorgehen korrekt?

- f) Wie könnte Stephan seine Regel verallgemeinern für den Fall, dass die beiden Divisionen „nicht aufgehen“?

¹⁹ Quelle (ohne a)): Aufgabe 4 im „Leistungsnachweis Fachwissenschaft Mathematik“ (Herbstsemester 2014)

5.8 Grundvorstellungen zum Bruchrechnen²⁰

Verschiedene Schülerinnen und Schüler sollen in einer Umfrage $\frac{2}{3}$ von 36 bestimmen. Dazu werden ihnen drei Lösungsvarianten vorgelegt:

Aufgabe

a) Mit welcher Rechnung kann man $\frac{2}{3}$ von 36 bestimmen? (Kreuze eine oder mehrere an)

$36 - \frac{2}{3}$
 $36 : \frac{2}{3}$
 $\frac{2}{3} \cdot 36$
 keine davon, sondern so: _____

b) Begründe deine Antwort zu a)

- Lösen Sie die Aufgabe zuerst für sich: Wie berechnen Sie das Ergebnis?
- Welche Grundvorstellung von Bruchzahlen muss ein Kind aufgebaut haben, um die Aufgabe lösen zu können?
- Was hat die Aufgabe „Bestimme $\frac{2}{3}$ von 36“ mit einer Prozentrechnung zu tun?

Drei der befragten Schülerinnen und Schüler lösen und begründen die Aufgabe sehr unterschiedlich:

Hendriks Begründung für $36 : \frac{2}{3}$
(9. Klasse Gymnasium):

Man will ja wissen, wie viel $\frac{2}{3}$ von 36 sind.
Dann muss man geteilt rechnen und kriegt das Ergebnis raus.

Lisas Begründung für $36 - \frac{2}{3}$
(7. Klasse Gesamtschule):

$\frac{2}{3}$ von 36
↓
also minus

Jans Begründung für $\frac{2}{3} \cdot 36$
(7. Klasse Gymnasium):

Weil "von" Aufgaben Mal Aufgaben sind.
(hat unser Lehrer gesagt)

- Für die richtige Lösung der Aufgabe sollen drei Punkte vergeben werden: Wie viele Punkte würden Sie welcher Schülerin / welchem Schüler geben? Begründen Sie Ihre Bewertung.
- Schreiben Sie Hendrik (oben) eine inhaltliche Rückmeldung.


²⁰ Prediger, Susanne: Verstehen durch Vorstellen. In: Leuders et al. (Hrsg.), *Mathemagische Momente*, Berlin: Cornelsen Verlag, 2009, S. 166–175.

5.9 Sachaufgaben zu Bruchrechnungen erfinden²¹

- a) Formulieren Sie eine Sachaufgabe, die auf die Rechnung $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ führt.
- b) Nachstehend sind fünf Schülerdokumente mit Vorschlägen von Sachaufgaben für die Rechnung in a) abgebildet:

S1:

Wir machen einen Ausflug, bei dem wir eine Wanderung machen. Da es eine längere Wanderung wird haben wir nach $\frac{2}{3}$ der Distanz eine Pause vorgesehen. Peter fragt in der Mitte der Distanz bis zum Pausenort wie weit es noch geht. Kannst du Peter eine Antwort in einem Bruch geben?



Das Diagramm zeigt eine horizontale Linie, die eine Wanderung darstellt. Links ist ein Punkt mit der Aufschrift 'Start' markiert, rechts ein Punkt mit der Aufschrift 'Ziel'. In der Mitte der Linie befindet sich ein Punkt mit der Aufschrift 'Pause'.

S4:

Sachaufgabe: Du hast noch die Hälfte von deinem Geburtstagskuchen. Dein Vater hat noch ein Stück, deine Mutter noch ein Stück und du noch ein Stück. ^{dann ist er weg} Alle drei Stücke sind gleich gross. ~~Wie gross sind die Stücke für deinen Vater und deine Mutter zusammen?~~ Wie viel von deinem Kuchen haben deine Eltern zusammen gegessen?

S2:

Deine Mutter hat dir erlaubt diesen Frühlings Blumen im Garten anzupflanzen. Jedoch hat sie dir gesagt du darfst nur $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$ des Beetes gebrauchen. Wie viele Anteile des Beetes darfst du bepflanzen? Rechne mit Brüchen und gib das Resultat gekürzt an.

S5:

2 Kinder gehen in ein Restaurant und bestellen je eine Pizza. Da sie noch sehr klein sind, können sie beide ihre Pizza nicht aufessen. Das erste Kind hat $\frac{2}{3}$ seiner Pizza übrig, das zweite Kind hat $\frac{1}{2}$ seiner Pizza übrig. Wieviel nehmen beide Kinder von der Pizza mit nach Hause, wenn man den Nenner von beiden PIZZEN zusammennimmt?

S3:

Ich habe $\frac{2}{3}$ von einer Tafel Schokolade gegessen, von einer zweiten Tafel habe ich die Hälfte gegessen. Wie viel Schokolade habe ich insgesamt gegessen?

Notieren Sie für jedes Dokument: Was an der Antwort ist fachlich korrekt, was nicht? Wo liegen allfällige Denkfehler? Bewerten Sie auf dieser Grundlage jedes Schülerdokument (maximal 2 Punkte) und begründen Sie Ihre Bewertungen.

²¹ Quelle: Teilaufgaben a) und b) stammen aus Aufgabe 2 des „Leistungsnachweis Fachwissenschaft Mathematik (Herbstsemester 2016)“,

5.10 Dichtigkeit der Bruchzahlen

- a) Gina behauptet, es gäbe zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ keine weitere Bruchzahl. Mit welchem (für Gina möglichst einleuchtenden) Argument könnten Sie ihr vermutlich weiterhelfen?
- b) Finden Sie zwei Bruchzahlen, die zwischen $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{7}$ liegen. Ebenso für $\frac{3}{7}$ und $\frac{3}{8}$.
- c) Geben Sie ein möglichst einfaches Rezept an, wie sich aus zwei Bruchzahlen eine dritte berechnen lässt, die zwischen den beiden liegt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Weil es solche Rezepte gibt, sagt man auch, dass die Menge der Bruchzahlen *dicht* auf der Zahlengeraden liegt.

- d) Formulieren Sie in eigenen Worten, was es heisst, dass die Brüche dicht auf der Zahlengeraden liegen.

5.11 Dezimalbruchentwicklung von Brüchen

- a) Beispielsweise für Viertel und für Fünfundzwanzigstel bricht die Dezimalbruchentwicklung der Brüche mit diesen Nennern ab. Es gibt keine Periode.

Formulieren Sie allgemein, für welche Nenner die Dezimalbruchentwicklung abbricht.

- b) Wie lang ist die Periode bei $\frac{1}{7}$ und bei $\frac{1}{17}$? (Allenfalls hilft der Taschenrechner). Führen Sie nach Möglichkeit die Division schriftlich aus
- wie lang kann die Periode jeweils höchstens sein.
 - Wie lang könnte die Periode bei $\frac{1}{109}$ höchstens sein. Begründen Sie.